1 курс

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения комбинированного занятия по дисциплине
«Математика»

Раздел 5. Комплексные числа.

Тема № 5.1: «Комплексные числа»

Комбинированные занятия № 30-31

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань 2024

Комбинированные занятия № 30-31
по Теме № 5.1 «Комплексные числа»

Цель занятий: изучить со студентами комплексные числа

Виды занятий: классно-групповые, комбинированные (по проверке знаний, умений по пройденному материалу, по изучению и первичному закреплению нового материала).

Метод проведения занятий: доведение теоретических сведений, выполнение практических заданий.

Время проведения: 4 ч (2 занятия по 2 часа)

Основные вопросы:

1. Понятие комплексного числа.
2. Сопряженные комплексные числа, модуль и аргумент комплексного числа.
3. Форма записи комплексного числа (геометрическая, тригонометрическая, алгебраическая).
4. Арифметические действия с комплексными числами.
5. Практическое применение полученных знаний – решение задач.

Литература:

1. [1 учебник раздела «Дополнительной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины]: *Богомолов, Н. В.* Математика. Алгебра и начала анализа. Базовый уровень: 10—11 классы : учебник для среднего общего образования / Н. В. Богомолов. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 241 с. — (Общеобразовательный цикл). — ISBN 978-5-534-16084-0. —Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/544860, глава 7.

Примерный расчет времени (по каждому занятию):

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

Вступительная часть (по каждому занятию):

Занятие начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (нового материала), закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы, опроса по пройденному материалу.

Основная часть (теоретическая):

Первый вопрос: <u>Понятие комплексного числа.</u>

Определение

Комплексное число – это выражение вида $a + b \cdot i$, в котором a и b – любые вещественные числа, i – символ, обладающий таким свойством: $i^2 = -1$.

- Число a называют действительной частью комплексного числа $a + b \cdot i$ и пишут $\mathrm{Re}(a + b \cdot i) = a$ (Re – сокращение от слова real, т.е. "действительный").
- Число b называют мнимой частью комплексного числа $a + b \cdot i$ и пишут $\mathrm{Im}(a + b \cdot i) = b$ (Im – сокращение от слова imaginary, т.е. "мнимый").

Примеры

$z_1 = -1 + 2i,\ z_2 = \sqrt{3} - \frac{i}{2},\ z_3 = 3 + i \cdot \ln 5,\ z_4 = \sqrt{10}i,\ z_5 = i$

Также, сведения по данному вопросу представлены во 1-ом учебнике раздела «Дополнительной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины, **глава 7.**

Второй вопрос: <u>Сопряженные комплексные числа, модуль и аргумент комплексного числа.</u>

Введем на плоскости прямоугольную систему координат. Тогда каждому комплексному числу $z = (x; y)$ мы можем взаимно-однозначно сопоставить точку этой плоскости с координатами $\{x; y\}$. Данной точке также будет соответствовать радиус-вектор $\overrightarrow{\{x; y\}}$. Назовём такую плоскость *комплексной плоскостью.*

Действительные числа, то есть числа вида $(x; 0)$, расположатся на горизонтальной оси данной плоскости, чисто мнимые числа, то есть числа вида $(0; y)$, расположатся на вертикальной оси данной плоскости. Соответственно, горизонтальная и вертикальная оси комплексной плоскости носят название вещественной и мнимой осей.

Модулем (абсолютной величиной) комплексного числа $z = (x; y)$ будем называть расстояние от точки $\{x; y\}$ комплексной плоскости до начала координат. Обозначать модуль комплексного числа будем так: $|z|$ или r. Имеет место следующее равенство:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1. Для комплексного числа $(0;0)$ значение аргумента не определено.

2. *Аргументом* ненулевого комплексного числа $z=(x;y)$ будем называть угол между положительным направлением вещественной оси и радиус-вектором $\overrightarrow{\{x;y\}}$ соответствующей точки, отсчитываемый против часовой стрелки. Обозначать аргумент комплексного числа будем так: φ или $Arg(z)$. Имеют место следующие равенства:

$$\cos\varphi=\frac{x}{|z|};\sin\varphi=\frac{y}{|z|}.$$

3. Для ненулевого комплексного числа z аргумент определяется с точностью до $2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. *Главным значением аргумента* будем называть значение аргумента из промежутка $(-\pi;\pi]$ и обозначать $arg(z)$.

Комплексное число $(x;-y)$ будем называть *сопряжённым* (или *комплексно-сопряжённым*) к числу $z=(x;y)$. Обозначать сопряжённое к z число будем так: $\bar{z}$ или z^*.

Числа z и $\bar{z}$ на комплексной плоскости представляют собой симметричные относительно вещественной оси точки. Имеют место следующие равенства:

$|\bar{z}|=|z|; arg(\bar{z})=-arg(z).$

Также, сведения по данному вопросу представлены во 1-ом учебнике раздела «Дополнительной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины, **глава 7.**

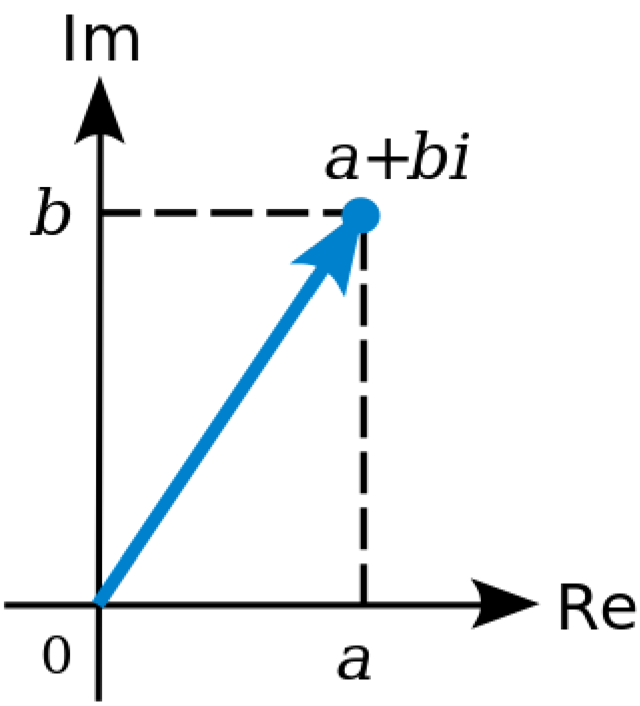
Третий вопрос: <u>Форма записи комплексного числа (геометрическая, тригонометрическая, алгебраическая).</u>

Комплексное число $(0;1)$ назовём мнимой единицей и обозначим i. Заметим, что из данного определения следует равенство $i^2=-1$.

Используя выше определённые операции сложения и умножения комплексных чисел, мы можем записать, что

$$z=(x;y)=(x;0)+i\cdot(y;0)=x+iy.$$

Такое представление комплексного числа z в виде $x+iy$ называется алгебраической формой записи комплексного числа.



Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Вещественную x и мнимую y части комплексного числа z можно выразить через модуль r и аргумент φ: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. Таким образом, всякое ненулевое комплексное число z можно записать в следующем виде:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такое представление комплексного числа z называется тригонометрической формой записи комплексного числа.

Геометрическая модель комплексного числа

Введем на плоскости прямоугольную систему координат. Тогда каждому комплексному числу $z = (x; y)$ мы можем взаимно-однозначно сопоставить точку этой плоскости с координатами $\{x; y\}$. Данной точке также будет соответствовать радиус-вектор $\overrightarrow{\{x; y\}}$. Назовём такую плоскость *комплексной плоскостью*.

Действительные числа, то есть числа вида $(x; 0)$, расположатся на горизонтальной оси данной плоскости, чисто мнимые числа, то есть числа вида $(0; y)$, расположатся на вертикальной оси данной плоскости. Соответственно, горизонтальная и вертикальная оси комплексной плоскости носят название вещественной и мнимой осей.

Также, сведения данному вопросу представлены во 1-ом учебнике раздела «Дополнительной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины, **глава 7.**

Четвёртый вопрос: Арифметические действия с комплексными числами.

Пусть $\boxed{z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i}$ – два любые комплексных числа.

1. **Сложение:**

$$\boxed{z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} \tag{1}$$

2. **Вычитание:**

$$\boxed{z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i} \tag{2}$$

3. **Умножение:**

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)\cdot(a_2 + b_2 i) = a_1a_2 + a_1b_2 i + b_1a_2 i + b_1b_2 i^2 = \left[i^2 = -1\right] = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i$$

$$\boxed{z_1 z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i} \tag{3}$$

4. **Деление:**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \left[\begin{array}{c}\text{умножим числитель и знаменатель на}\\ \text{комплексное число } a_2 - b_2 i\end{array}\right] = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} =$$

$$= \frac{a_1a_2 - a_1b_2 i + b_1a_2 i - b_1b_2 i^2}{a_2^2 - \cancel{a_2b_2 i} + \cancel{b_2a_2 i} - b_2^2 i^2} = \left[i^2 = -1\right] = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (b_1a_2 - a_1b_2)i}{a^2 + b^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a^2 + b^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a^2 + b^2} i$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a^2 + b^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a^2 + b^2} i} \tag{4}$$

Примеры

1. Сложить комплексные числа $z_1 = -5 + 7i,\ z_2 = 5 - i$. Воспользуемся формулой (1):

$$z_1 + z_2 = (-5 + 5) + (7 - 1)i = 6i$$

2. Вычесть из комплексного числа $z_1 = 3 - 11i$ комплексное число $z_2 = 4 + 15i$. Воспользуемся формулой (2):

$$z_1 - z_2 = (3 - 4) + (-11 - 15)i = -1 - 26i$$

3. Умножить комплексное число $z_1 = -5 + i$ на комплексное число $z_2 = 1 - 4i$:

$$z_1 \cdot z_2 = (-5 + i)\cdot(1 - 4i) = -5\cdot 1 + (-5)\cdot(-4i) + i\cdot 1 + i\cdot(-4i) = -5 + 20i + i - 4i^2 =$$
$$= \left[i^2 = -1\right] = -5 + 21i + 4 = 1 + 21i$$

4. Разделить комплексное число $z_1 = 1 + 2i$ на комплексное число $z_2 = 3 - 7i$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{3-7i} = \left[\begin{array}{c}\text{умножим числитель и знаменатель на}\\ \text{комплексное число } 3+7i\end{array}\right] = \frac{(1+2i)(3+7i)}{(3-7i)(3+7i)} =$$

$$= \frac{3+7i+6i+14i^2}{3^2-(7i)^2} = \left[i^2 = -1\right] = \frac{3+13i-14}{9+49} = \frac{-11+13i}{58} = -\frac{11}{58} + \frac{13}{58}i$$

5. Упростить выражение $(6x^3 + yi)(-6x^3 + yi)$:

$$(6x^3+yi)(-6x^3+yi) = (yi+6x^3)(yi-6x^3) = \left[\begin{array}{c}\text{воспользуемся формулой}\\ \text{сокращенного умножения}\\ (a-b)(a+b) = a^2-b^2\end{array}\right] =$$

$$(yi)^2 - (6x^3)^2 = y^2i^2 - 36x^6 = \left[i^2 = -1\right] = -y^2 - 36x^6$$

6. Разложить на множители $x^2 + 1$:

$$x^2 + 1 = x^2 - (-1) = \left[-1 = i^2\right] = x^2 - i^2 = (x-i)(x+i)$$

7. Разложить на множители $25x^2 + 9y^2$:

$$25x^2+9y^2 = 25x^2-(-1\cdot 9y^2) = \left[-1 = i^2\right] = 25x^2-(i^2\cdot 9y^2) = (5x)^2-(i\cdot 3y)^2 = (5x-i\cdot 3y)(5x+i\cdot 3y)$$

Также, сведения по данному вопросу представлены во 1-ом учебнике раздела «Дополнительной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины, **глава 7.**

Пятый вопрос: <u>Практическое применение полученных знаний – решение задач.</u>

Задание: (исходные данные):

1. Рассмотреть примеры выполнения практических заданий (решение задач), приведенных в текущем План-конспекте занятия при рассмотрении четвертого вопроса.

2. Решить задачи, заданные преподавателем (из приведенного ниже списка):

1. Сложите комплексные числа z_1 и z_2:

   (a) $z_1 = 1 + i,\ z_2 = 13 - 23i$

   (b) $z_1 = 0,7 - 2,5i,\ z_2 = 1,5 - 1,2i$

   (c) $z_1 = 2\sqrt{3} + \sqrt{2}i,\ z_2 = -\sqrt{3} + 3\sqrt{2}i$

2. Вычтите из комплексного числа z_1 комплексное число z_2.

   (a) $z_1 = 3 - i,\ z_2 = 1,4 + 2,3i$
   (b) $z_1 = 7 + 3,5i,\ z_2 = -1,9 + 2,23i$
   (c) $z_1 = -\sqrt{5} + \sqrt{3}i,\ z_2 = \sqrt{5} + 6\sqrt{3}i$

3. Умножьте комплексное число z_1 на комплексное число z_2:

   (a) $z_1 = -i,\ z_2 = 4 + \sqrt{10}i$
   (b) $z_1 = -1 - 0,5i,\ z_2 = 0,3 + 2i$
   (c) $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i,\ z_2 = 2 - 2i$

4. Разделите комплексное число z_1 на комплексное число z_2:

   (a) $z_1 = 1 - i,\ z_2 = 1 + i$ (b) $z_1 = -\sqrt{2} + 2i,\ z_2 = i$ (c) $z_1 = 3 + 4i,\ z_2 = 5 - 3i$

5. Упростите выражение:

   (a) $(x + i)(x - i)$ (b) $(3x - yi)^2$ (c) $(\sqrt{3}y + \sqrt{2}xi)^2$

Заключительная часть (по каждому занятию):

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Выдать задание на самоподготовку (домашнее задание).

Задание на самоподготовку (домашние задания):

1. Детально проработать, законспектировать материал занятия, размещенный в данном план-конспекте.
2. Решить задачи, заданные преподавателем.
3. Подготовиться к опросу по пройденному материалу.