1 курс

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения лекционного занятия № 32 по дисциплине
«Математика»

Раздел 6. Производная функции, ее применение.

Тема № 6.1: «Понятие производной. Формулы и правила дифференцирования»

<u>Лекционное занятие № 32</u>

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань 2024

Лекционное занятие № 32
по Теме № 6.1 «Понятие производной. Формулы и правила дифференцирования»

Цель занятия: изучить со студентами понятие производной, формулы и правила дифференцирования

Вид занятия: классно-групповое, комбинированное (по проверке знаний, умений по пройденному материалу, по изучению и первичному закреплению нового материала).

Метод проведения занятия: доведение теоретических сведений, выполнение практических заданий.

Время проведения: 2 ч

Основные вопросы:

1. Определение числовой последовательности и способы ее задания. Свойства числовых последовательностей. Определение предела последовательности.
2. Вычисление пределов последовательностей.
3. Предел функции на бесконечности. Предел функции в точке.
4. Приращение аргумента. Приращениефункции.
5. Задачи, приводящие к понятию производной.
6. Определение производной.
7. Алгоритм отыскания производной.
8. Практическое применение полученных знаний – решение задач.

Литература:

1. [1 учебник раздела «Основные печатные и электронные издания» рабочей программы изучения дисциплины]: Алимов Ш.А. Математика: алгебра и начала математического анализа,геометрия. Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровень./Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачеваи др. – Москва: Просвещение, 2024.-463 с., ISBN 978-5-09-112136-0. —Текст : электронный // ЭБС Лань — URL: https://e.lanbook.com/book/408656, с. 229-239 (часть 5), **§ 44,45 (2012-2017,2024 годы издания**, глава **VIII**).

Примерный расчет времени:

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

Вступительная часть:

Занятие начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (нового материала), закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы, опроса по пройденному материалу.

Основная часть (теоретическая):

Первый вопрос: Определение числовой последовательности и способы ее задания. Свойства числовых последовательностей. Определение предела последовательности.

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана ***последовательность***

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots = \{x_n\} \qquad (10.1)$$

Каждый x_n называется элементом этой последовательности, а число n –его номером. По определению последовательность всегда содержит бесконечное множество элементов.

Общий элемент последовательности является функцией от n.

$$x_n = f(n) \qquad (10.2)$$

Таким образом, последовательность может рассматриваться как функция порядкового номера элемента.

Задать последовательность можно различными способами – главное, чтобы был указан способ получения любого члена последовательности.

Пример 1. $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ или $\{x_n\} = -1; 1; -1; 1; \ldots$

$\{x_n\} = \{\sin\pi n/2\}$ или $\{x_n\} = 1; 0; -1; 0; \ldots$

Способы задания числовой последовательности:

Аналитический. Последовательность задаётся в виде формулы, с помощью которой можно найти любой член этой последовательности, подставляя в неё вместо переменной натуральные числа.

Рекуррентный. Даётся первый (или несколько первых) член последовательности, а затем формула, которая связывает любой член с предыдущим членом или предыдущими членами.

Словесный. При этом способе числовая последовательность просто описывается без введения каких-либо формул.

Ещё один способ задания — графический, когда график последовательности состоит из точек с абсциссами 1, 2, 3, 4....

Основные свойства числовых последовательностей включают ограниченность, монотонность и сходимость.

Ограниченная последовательность имеет верхнюю и нижнюю границы, то есть все ее элементы находятся в определенном интервале.

Монотонная последовательность может быть возрастающей (каждый следующий элемент больше предыдущего) или убывающей (каждый следующий элемент меньше предыдущего).
Сходящаяся последовательность имеет предел, то есть она стремится к определенному числу при бесконечном продолжении.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, если существует такое число M>0, что для любого n верно неравенство:

$$|x_n| \le M \tag{10.3}$$

т.е. все члены последовательности принадлежат промежутку $[-M; M]$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной сверху***, если для любого n существует такое число M, что

$$x_n \le M \tag{10.4}$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной снизу***, если для любого n существует такое число M, что

$$x_n \ge M \tag{10.5}$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***неограниченной***, если для любого числа $M>0$ найдется n, такое, что верно неравенство:

$$|x_n| > M \tag{10.6}$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***неограниченной сверху***, если для любого числа $M>0$ найдется n, такое, что верно неравенство:

$$x_n > M \tag{10.7}$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***неограниченной снизу***, если для любого числа $M>0$ найдется n, такое, что верно неравенство:

$$x_n < M \tag{10.8}$$

Пример 2. $\{x_n\} = \{n\}$ – ограничена снизу $\{1, 2, 3, \dots\}$ например, числом $M = 0{,}5$.

Число a называется ***пределом*** последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon>0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n > N$ выполняется условие:

$$|x_n - a| < \varepsilon \tag{10.9}$$

В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$ ***сходится*** к a при $n\to\infty$.

Отметим, что неравенство (10.6) равносильно неравенству

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \tag{10.10}$$

Для заданного числа a всякий интервал вида $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется ε-окрестностью числа a и обозначается O_a^ε.

С помощью понятия окрестности определение предела последовательности можно перефразировать следующим образом:

Число a называется ***пределом*** последовательности $\{x_n\}$, если в любой его окрестности содержатся все члены последовательности за исключением их конечного числа. Предел последовательности часто называют *точкой сгущения*.

Если отбросить какое-либо конечное число членов последовательности, то получаются новые последовательности, при этом если сходится одна из них, то сходится и другая.

Последовательность, не являющаяся сходящейся, называется расходящейся.

Пример 3. Доказать, что предел последовательности $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Пусть при $n > N$ верно $\left|0 - \frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon$, т.е. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Это верно при $n > \frac{1}{\varepsilon}$, таким образом, если за N взять целую часть от $\frac{1}{\varepsilon}$, то утверждение, приведенное выше, выполняется.

Пример 4. Показать, что при n→∞ последовательность $3,\ 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, ..., 2+\frac{1}{n}, \ldots$ имеет пределом число 2.

Имеем: $\{x_n\} = \{2 + 1/n\}$ или $\{1/n\} = \{x_n - 2\}$

Очевидно, что существует такое число n, что $|x_n - 2| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Второй вопрос: <u>Вычисление пределов последовательностей.</u>

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0;$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0, |q| < 1;$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$, т. е. предел последовательности, каждый член которой равен постоянному числу, равен этому числу.

4. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$, то

4.1. предел суммы равен сумме пределов:

$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = b + c;$

4.2. предел произведения равен произведению пределов:

$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = b \cdot c;$

4.3. предел частного равен частному пределов:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{b}{c}$, если $c \neq 0;$

4.4. постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty} kx_n = kb.$$

5. Для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k}{n^m} = 0.$

Пример:

1. Найти предел последовательности:

$$x_n = \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + 3.$$

Используем правило «предел суммы»:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + 3\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} + \lim_{n\to\infty} 3 = 0 - 0 + 3 = 3.$$

2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3}{n^2+4}.$

Для таких заданий удобно использовать следующий приём: почленно разделить числитель и знаменатель дроби на максимальную степень переменной n. В нашем случае разделим на n^2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{4}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}} =$$

— после используем правило «предел частного»:

$$= \frac{2+0}{1+0} = \frac{2}{1} = 2.$$

Итак: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3}{n^2+4} = 2.$

Пример

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^3-2x^2+x+1}{x^2-5x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^3-2x^2+x+1\right)}{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-5x+3\right)}=\frac{3\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^3-2\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^2+\lim\limits_{x\to 2}x+1}{\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^2-5\lim\limits_{x\to 2}x+3}=$$

$$=\frac{3\cdot 2^3-2\cdot 2^2+2+1}{2^2-5\cdot 2+3}=-6\frac{1}{3}$$

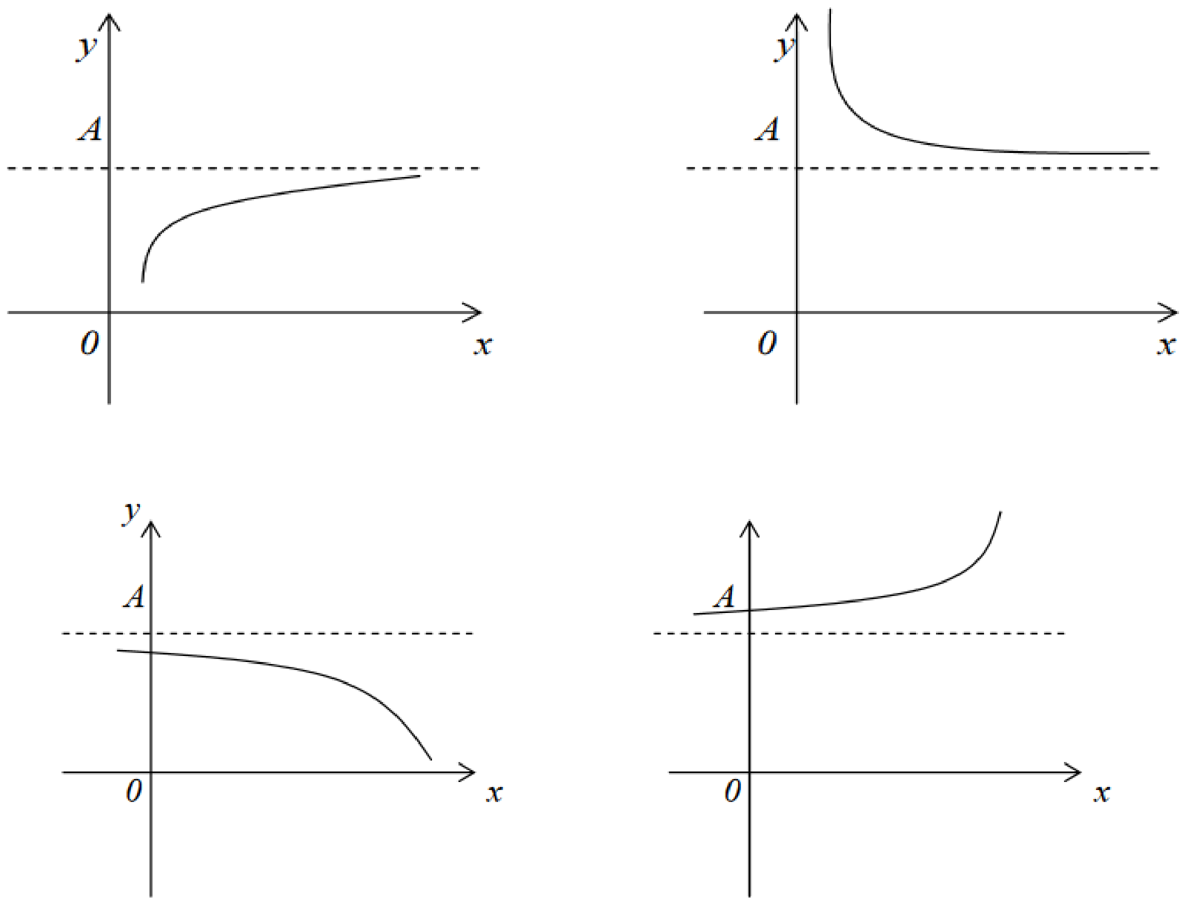
Третий вопрос: <u>Предел функции на бесконечности. Предел функции в точке.</u>

<u>Предел функции на бесконечности.</u>

Число *A* называется ***пределом функции*** *f(x)* при $x\to\infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $M>0$, что для всех *x*, $|x|>M$ выполняется неравенство $|A-f(x)|<\varepsilon$.

При этом предполагается, что функция f(x) определена в окрестности бесконечности. Записывают: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

Графически можно представить:



Предел функции в точке.

1. ***Предел функции по Гейне***

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве X. Возьмем из X бесконечную последовательность $\{x_n\}$ точек $x_n \in X$, $n=1,2,...$ Соответствующие значения функции в точках этой последовательности также образуют числовую последовательность $\{f(x_n)\}$.Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$ для любой последовательности $\{x_n\}$, такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ причем $x_n \neq a$, $n=1,2,...$, $a \in X$ или $a \notin X$.

Другими словами: число A называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если для любой сходящейся к a последовательности значений аргумента x, отличных от a, соответствующая последовательность значений функции сходится к числу A.

Если такое число A существует, то говорят, что функция $y=f(x)$ имеет предел в точке a.

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ или $f(x)\to A$ при $x \to a$.

2. ***Предел функции по Коши***

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$ (т.е. в самой точке $x = a$ функция может быть и не определена)

Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ при $x \to a$, если для любого ε>0 существует такое число $\delta > 0$, что для всех x таких, что

$$0 < |x - a| < \delta$$

верно неравенство $$|f(x) - A| < \varepsilon \ .$$

То же определение может быть записано в другом виде:

Если $a - \delta < x < a + \delta$, $x \neq a$,(значение аргумента x попали в δ-окрестность точки a), то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ (соответствующие значения функции попадают в ε-окрестность точки A).

Если $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ только при $x < a$, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A_1$ называется ***пределом*** функции $f(x)$ в точке $x = a$ ***слева***, а если $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ только при $x > a$, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A_2$ называется ***пределом*** функции $f(x)$ в точке $x = a$ ***справа***.

Приведенные выше определения относится к случаю, когда функция $f(x)$ не определена в самой точке $x = a$, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также ***односторонними пределами*** функции $f(x)$ в точке $x = a$. Если A – конечное число, то говорят, что A – ***конечный предел*** функции $f(x)$.

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. *Функция $f(x)$ имеет в точке a предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют левый и правый пределы, причем они равны. В таком случае предел функции равен односторонним пределам.*

Теорема 2. *Для того чтобы функция $f(x)$ при $x \to a$ имела предел, равный A, необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки $x=a$ выполнялось условие*

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$ ($\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$).

Теорема 3. *Если $f(x) \to 0$ при $x \to a$ (если $x \to \infty$) и не обращается в ноль, то* $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} \to \infty$.

Теорема 4. $\lim\limits_{x \to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \to a$.

Теорема 5. $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

Теорема 6. $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

Теорема 7. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$

Теорема 8. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\left(\lim\limits_{x\to a}f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$, если пределы $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ одновременно не равны нулю.

Теорема 9. *Если f(x)>0 вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, *то A>0.*

Аналогично определяется знак предела при *f(x) < 0, f(x) ≥ 0, f(x) ≤ 0.*

Теорема 10. (о двух полицейских) *Если g(x)≤f(x)≤u(x) вблизи точки x=a и* $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}u(x)=A$, *то и* $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.

предел отношения бесконечно малых не меняется при замене их на эквивалентные бесконечно малые. Этот факт дает возможность при нахождении пределов заменять бесконечно малые на эквивалентные им функции, что может сильно упростить вычисление пределов.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций при $\alpha(x)\to 0$

$\sin\alpha(x)$	$\alpha(x)$
$tg\alpha(x)$	$\alpha(x)$
$1-\cos\alpha(x)$	$\dfrac{\alpha^2(x)}{2}$
$\ln(1+\alpha(x))$	$\alpha(x)$
$e^{\alpha(x)}-1$	$\alpha(x)$
$c^{\alpha(x)}-1$	$\alpha(x)\ln c$
$(1+\alpha(x))^c$	$c\alpha(x)$
$arc\sin\alpha(x)$	$\alpha(x)$
$arctg\alpha(x)$	$\alpha(x)$

Пример Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{\sin 7x}$

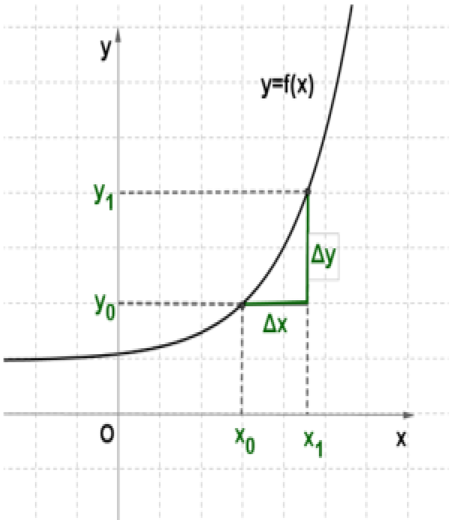
Так как tg5x ~ 5x и sin7x ~ 7x при x → 0, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{\sin 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{7x}=\frac{5}{7}$$

Четвёртый вопрос: <u>Приращение аргумента. Приращение функции.</u>

При изучении поведения функции $y = f(x)$ около конкретной точки x_0, необходимо знать, как меняется значение функции при изменении значения аргумента. Введём следующие понятия.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точках x_0 и x_1. Разность $x_1 - x_0$ называют **приращением аргумента** (при переходе от точки x_0 к точке x_1), а разность $f(x_1) - f(x_0)$ называют **приращением функции**.



Приращение аргумента обозначают Δx, произносят: дельта икс (Δ — прописная буква; δ — строчная буква греческого алфавита «дельта»). Приращение функции обозначают Δy или Δf.

Итак, $x_1 - x_0 = \Delta x$, значит, $x_1 = x_0 + \Delta x$.

$f(x_1) - f(x_0) = \Delta y$, значит, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, когда в этой точке выполняется условие: если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$,

Пятый вопрос: <u>Задачи, приводящие к понятию производной.</u>

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на на с. 229 - 230 (часть 5) **§ 44 (2012-2017,2024 годы издания**, глава **VIII**).

Шестой вопрос: <u>Определение производной.</u>

Вообще, пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке, x — точка этого промежутка и число $h \neq 0$ такое, что $x + h$ также принадлежит данному промежутку. Тогда предел разностного отношения $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ при $h \to 0$ (если этот предел существует) называется *производной функции $f(x)$ в точке x* и обозначается $f'(x)$ (читается: «Эф штрих от икс»). Таким образом,

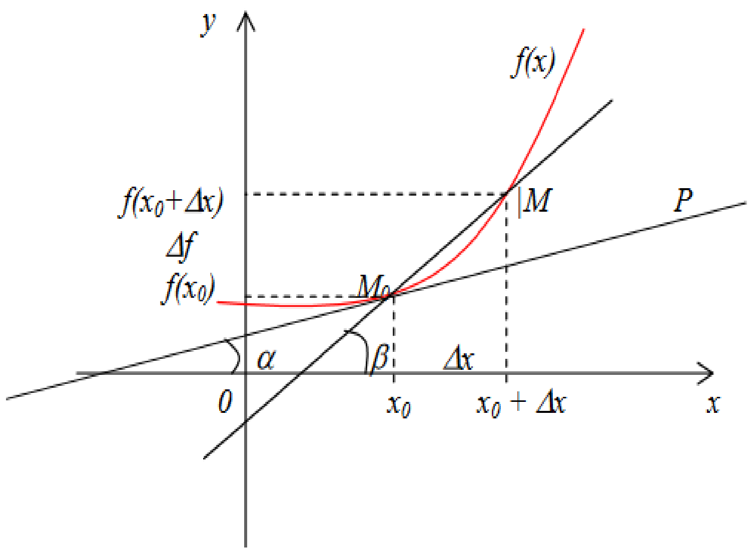
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \qquad (1)$$

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на на с. 230 - 234 (часть 5) **§ 44 (2012-2017,2024 годы издания**, глава **VIII**).

Седьмой вопрос: <u>Алгоритм отыскания производной.</u>

Производной функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0$ называется конечный предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (14.1)$$



Пусть $y=f(x)$ определена на некотором промежутке (a,b). Пусть $M_0(x_0,y_0)\in(a,b)$ и $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in(a,b)$– точки, лежащие на линии, описываемой уравнением $y=f(x)$. Тогда $tg\beta=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$– тангенс угла наклона секущей M_0M к графику функции $y=f(x)$. Пусть теперь $M\to M_0$, тогда $\Delta x\to 0$ и секущая M_0M стремится к своему предельному положению – *касательной* M_0P в точке M_0, $\beta\to\alpha$.

$$\lim_{\Delta x\to 0} tg\beta=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)=tg\alpha, \qquad (14.2)$$

где β– угол наклона секущей M_0M графика функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$, α – угол наклона касательной M_0P к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

Таким образом, геометрический смысл производной функции в том, что угловой коэффициент касательной к графику функции равен ее производной в точке касания.

Уравнение касательной к кривой:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0) \qquad (14.3)$$

Уравнение нормали к кривой:

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \qquad (14.4)$$

Выясним физический (механический) смысл производной функции $s=f(t)$ в момент времени t_0, где $f(t)$– закон движения материальной точки по прямой. Тогда разность $\Delta s=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$ есть путь, пройденный за интервал времени Δt, а отношение $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=v_{ср.}$–средняя скорость за время Δt. Предел $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=f'(t_0)=v_{мгн.}$ определяет мгновенную скорость точки в момент времени t_0.

Также сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на на с. 231 - 234 (часть 5) **§ 44 (2012-2017,2024 годы издания**, глава **VIII**).

Практическая часть.

Восьмой вопрос: Практическое применение полученных знаний – решение задач.

Задание: (исходные данные):

1. Рассмотреть примеры выполнения практических заданий (решение задач), приведенных в **§ 44, 45** 1-ого учебника раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины «Математика» (с.229-238).

2. Решить задачи, заданные преподавателем (из приведенного ниже списка): № 776, 778, 780, 781, 787, 788, 789 Учебника.

Заключительная часть:

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Выдать задание на самоподготовку (домашнее задание).

Задание на самоподготовку (домашнее задание):

1. Детально проработать, законспектировать материал занятия, размещенный в данном план-конспекте, в учебнике, указанном на с. Конспекта занятия.
2. Решить задачи, заданные преподавателем.
3. Подготовиться к опросу по пройденному материалу.