1 курс

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения лекционных занятий № 40-41 по дисциплине
«Математика»

Раздел 6. Производная функции, ее применение.

Тема № 6.7: «Монотонность функции. Точки экстремума»

Лекционные занятия № 40-41

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань 2024

Лекционные занятия № 40-41
по Теме № 6.7 «Монотонность функции. Точки экстремума»

Цель занятий: изучить со студентами понятие монотонности функции, точки экстремума, исследование функций, построение графика функции

Виды занятий: классно-групповые, комбинированные (по проверке знаний, умений по пройденному материалу, по изучению и первичному закреплению нового материала).

Методы проведения занятия: доведение теоретических сведений, выполнение практических заданий.

Время проведения: 4 ч (2 занятия по 2 ч)

Основные вопросы:

1. Возрастание и убывание функции. Соответствие возрастания и убывания функции знаку производной. Понятие монотонности функции.
2. Экстремумы функции. Наибольшее и наименьшее значение функции. Задачи на максимум и минимум.
3. Понятие асимптоты и способы её определения.
4. Алгоритм исследования функции и построения её графика с помощью производной.
5. Понятие производной высшего порядка. Соответствие знака второй производной выпуклости (вогнутости) функции на отрезке.
6. Дробно-линейная функция.
7. Практическое применение полученных знаний – решение задач.

Литература:

1. [1 учебник раздела «Основные печатные и электронные издания» рабочей программы изучения дисциплины]: Алимов Ш.А. Математика: алгебра и начала математического анализа,геометрия. Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровень./Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др. – Москва: Просвещение, 2024.-463 с., ISBN 978-5-09-112136-0. —Текст : электронный // ЭБС Лань — URL: https://e.lanbook.com/book/408656, с. 261-290 (часть 6), **§ 49-53 (2012-2017,2024 годы издания**, глава **IX**).

Примерный расчет времени (по каждому занятию):

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

Вступительная часть (по каждому занятию):

Занятие начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (нового материала), закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы, опроса по пройденному материалу.

Основная часть (теоретическая):

Первый вопрос: **<u>Возрастание и убывание функции. Соответствие возрастания и убывания функции знаку производной. Понятие монотонности функции.</u>**

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на на с. 261 – 265 (часть 6) **§ 49** (**2012-2017,2024 годы издания**, глава **IX**).

Второй вопрос: **<u>Экстремумы функции. Наибольшее и наименьшее значение функции. Задачи на максимум и минимум.</u>**

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на на с. 265 – 270, 277– 282 (часть 6) **§ 50,52** (**2012-2017,2024 годы издания**, глава **IX**).

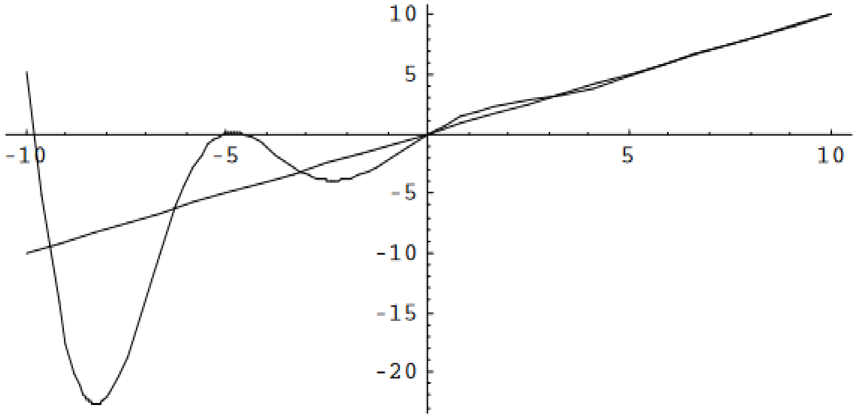
Третий вопрос: **<u>Понятие асимптоты и способы её определения.</u>**

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты x точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Прямая называется ***асимптотой*** кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой стремится к нулю при удалении точки в бесконечность.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Асимптоты могут быть прямые и наклонные. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Вообще говоря, кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке, как показано на приведенном ниже графике функции $y = x + e^{-\frac{x}{3}}\sin x$. Ее наклонная асимптота y=x.



Рассмотрим подробнее методы нахождения асимптот кривых.

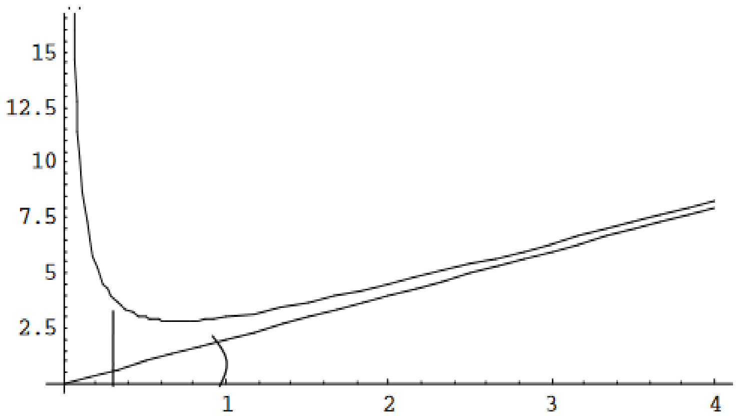
Вертикальные асимптоты

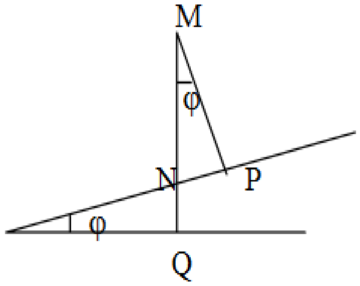
Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то прямая $x=a$ – асимптота кривой $y=f(x)$.

Например, для функции $f(x)=\dfrac{2}{x-5}$ прямая $x=5$ является вертикальной асимптотой.

Наклонные асимптоты

Предположим, что кривая $y=f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y_{ac.}=kx+b$.





Обозначим точку пересечения кривой и перпендикуляра к асимптоте – M, P – точка пересечения этого перпендикуляра с асимптотой. Угол между асимптотой и осью Ox обозначим φ. Перпендикуляр MQ к оси Ox пересекает асимптоту в точке N.

Тогда $MQ=y$ – ордината точки кривой, $NQ=y_{ac.}$ – ордината точки N на асимптоте.

По условию: $\lim_{x\to\infty}|MP| = 0$, $\angle NMP = \varphi$, $|NM| = \dfrac{|MP|}{\cos\varphi}$.

Угол φ – постоянный и не равный 90^0, тогда

$\lim_{x\to\infty}|MP| = \lim_{x\to\infty}|NM|\cos\varphi = \lim_{x\to\infty}|NM| = 0$

$|NM| = \big||MQ| - |QN|\big| = |y - y_{ac.}| = |f(x) - (kx+b)|$

Тогда $\lim_{x\to\infty}[f(x) - (kx+b)] = 0$.

Итак, прямая $y = kx + b$ – асимптота кривой. Для точного определения этой прямой необходимо найти способ вычисления коэффициентов k и b.

В полученном выражении выносим за скобки x:

$\lim_{x\to\infty} x\left[\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right] = 0$

Т.к. $x\to\infty$, то $\lim_{x\to\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right] = 0$, т.к. $b = const$, то $\lim_{x\to\infty}\dfrac{b}{x} = 0$; $\lim_{x\to\infty} k = k$.

Тогда $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} - k - 0 = 0$, следовательно,

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Т.к. $\lim_{x\to\infty}[f(x) - (kx+b)] = 0$, то $\lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] - \lim_{x\to\infty} b = 0$, следовательно,

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx]$$

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при $k=0$.

Пример 4. Найти асимптоты и построить график функции $y = \dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

Решение.

1) Вертикальные асимптоты:

$\lim_{x\to 0-0} y = \dfrac{x^2+2x-1}{x} = +\infty$ $\lim_{x\to 0+0} y = \dfrac{x^2+2x-1}{x} = -\infty$, следовательно,

$x=0$ – вертикальная асимптота.

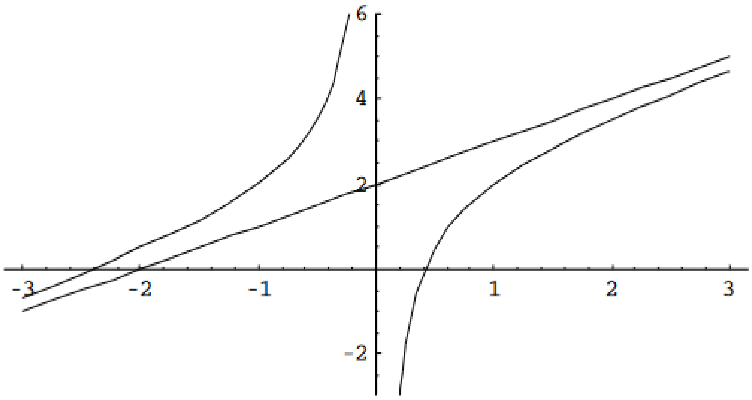
2) Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$$

Таким образом, прямая $y = x+2$ является наклонной асимптотой.

Построим график функции:



Пример 5. Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{9x}{9-x^2}$.

Решение. Прямые $x=3$ и $x=-3$ являются вертикальными асимптотами кривой. Действительно,

$$\lim_{x\to 3+0} y=\lim_{x\to 3+0}\frac{9x}{9-x^2}=\lim_{x\to 3+0}\frac{9x}{(3-x)(3+x)}=\frac{27}{-0}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3-0} y=\lim_{x\to 3-0}\frac{9x}{9-x^2}=\lim_{x\to 3-0}\frac{9x}{(3-x)(3+x)}=\frac{27}{+0}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -3+0} y=\lim_{x\to -3+0}\frac{9x}{9-x^2}=\lim_{x\to -3+0}\frac{9x}{(3-x)(3+x)}=\frac{-27}{+0}=-\infty$$

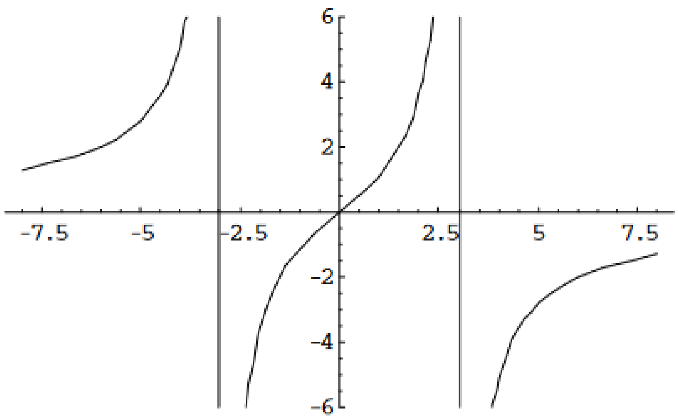
$$\lim_{x\to -3-0} y=\lim_{x\to -3-0}\frac{9x}{9-x^2}=\lim_{x\to -3-0}\frac{9x}{(3-x)(3+x)}=\frac{-27}{-0}=+\infty$$

Найдем коэффициенты k и b наклонной асимптоты по формулам

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{9-x^2}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{9x}{9-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{9}{x}}{\frac{9}{x^2}-1}=0$$

$y=0$ – горизонтальная асимптота.



Четвёртый вопрос: <u>Алгоритм исследования функции и построения её графика с помощью производной.</u>

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов.
Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо:
1) Найти область определения функции.
2) В случае если область определения функции симметрична относительно 0, проверить является ли функция четной или нечетной.
3) Найти точки разрыва функции (если они имеются) и ее односторонние пределы в этих точках. Изобразить на чертеже поведение функции вблизи каждой точки разрыва.
4) Найти асимптоты графика функции. Изобразить их на чертеже штриховыми линиями.
5) Изучить поведение функции при стремлении аргумента к концам промежутков области определения (если это неясно из предыдущих исследований).
6) Найти, если это возможно, точки пересечения графика функции с осями координат. Построить эти точки.
7) Найти интервалы возрастания и убывания функции, точки максимума и минимума. Вычислить значения функции в этих точках. Изобразить на чертеже поведение функции в окрестности каждой из них.
8) Найти промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба графика функции. Нанести на чертеж эти точки.
9) Используя полученные результаты исследования, построить график функции. Иногда для уточнения построения графика следует найти две-три дополнительные точки.

Также сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на на с. 271 – 276 (часть 6) **§ 51 (2012-2017,2024 годы издания**, глава **IX**).

Пятый вопрос: <u>Понятие производной высшего порядка. Соответствие знака второй производной выпуклости (вогнутости) функции на отрезке.</u>

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на на с. 283 – 286 (часть 6) **§ 53 (2012-2017,2024 годы издания**, глава **IX**).

Шестой вопрос: <u>Дробно-линейная функция.</u>

Дробно-линейными являются функции вида $y = (ax + b) / (cx + d)$, где $c \neq 0$ и $a/c \neq b/d$.

Это следует из того, что при $c = 0$ функция превращается в линейную, а если $a/c = b/d$, то дробь можно сократить и функция будет константой.

Особенности построения графиков дробно-линейных функций.

График дробно-линейной функции – гипербола.

Для построения графика достаточно найти прямые, к которым приближаются ветки гиперболы – асимптоты. Прямая x = -d/c – вертикальная асимптота, прямая y = a/c – горизонтальная.

График можно построить двумя способами:

Первый способ:

1. Выделить из дроби целую часть. 1
2. Определить асимптоты: y = и x =.
3. Составить таблицу для функции y =.
4. Построить график функции y = на асимптотах как на осях.

Второй способ:

1. Представить функцию в виде y = путём выделения из неё целой части.
2. Составить таблицу для функции y =, построить её график в исходной системе координат.
3. Воспользоваться правилами параллельного переноса вдоль осей координат.

Также сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на на с. 263 (часть 6) **§ 49 задача 1,** на с. 273 (часть 6) **§ 51 задача 3,** на с. 278 - 279 (часть 6) **§ 52 задачи 1,2,3** (**2012-2017,2024 годы издания**, глава **IX**).

Практическая часть.

Седьмой вопрос: Практическое применение полученных знаний – решение задач.

Задание: (исходные данные):

1. Рассмотреть примеры выполнения практических заданий (решение задач), приведенных в **§ 49-53** 1-ого учебника раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины «Математика» (с.261-280).

2. Решить задачи, заданные преподавателем (из приведенного ниже списка): № 899, 900, 902, 903, 912, 913, 914, 915, 923, 924, 926, 927, 928, 937, 938, 939, 953, 954, 955 Учебника.

Заключительная часть (по каждому занятию):

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Выдать задание на самоподготовку (домашнее задание).

Задание на самоподготовку (домашние задания):

1. Детально проработать, законспектировать материал занятия, размещенный в данном план-конспекте, в учебнике, указанном на с. 2 Конспекта занятия.
2. Решить задачи, заданные преподавателем.
3. Подготовиться к опросу по пройденному материалу.