1 курс

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения лекционного занятия № 37 по дисциплине
«Математика»

Раздел 6. Производная функции, ее применение.

Тема № 6.4: «Понятие непрерывности функции. Метод интервалов»

<u>Лекционное занятие № 37</u>

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань
2024

Лекционное занятие № 37
по Теме № 6.4 «Понятие непрерывности функции. Метод интервалов»

Цель занятия: изучить со студентами понятие непрерывности функции, повторить алгоритм решения неравенств методом интервалов.

Вид занятия: классно-групповое, комбинированное (по проверке знаний, умений по пройденному материалу, по изучению и первичному закреплению нового материала).

Метод проведения занятия: доведение теоретических сведений, выполнение практических заданий.

Время проведения: 2 ч

Основные вопросы:

1. Понятие непрерывности функции.
2. Свойства непрерывности функции.
3. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции в точке.
4. Алгоритм решения неравенств методом интервалов.
5. Практическое применение полученных знаний – решение задач.

Литература:

1. [1 учебник раздела «Основные печатные и электронные издания» рабочей программы изучения дисциплины]: Алимов Ш.А. Математика: алгебра и начала математического анализа,геометрия. Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровень./Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачеваи др. – Москва: Просвещение, 2024.-463 с., ISBN 978-5-09-112136-0. —Текст : электронный // ЭБС Лань — URL: https://e.lanbook.com/book/408656, с. 232-234 (часть 5), **§ 44 (2012-2017,2024 годы издания**, глава **VIII**).

Примерный расчет времени:

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

Вступительная часть:

Занятие начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (нового материала), закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы, опроса по пройденному материалу.

Основная часть (теоретическая):

Первый вопрос: <u>Понятие непрерывности функции.</u>

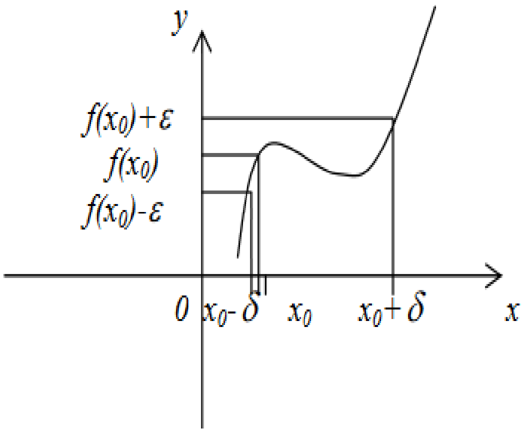
<u>Непрерывность функции в точке.</u>

Функция *f(x)*, определенная в окрестности некоторой точки x_0, а также в самой точке x_0 называется ***непрерывной в точке*** x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (13.1)$$

Тот же факт можно записать иначе: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)$ (13.2)

Символ предела и символ непрерывной функции можно переставлять между собой. Пример непрерывной функции:



Так как непрерывность функции в точке – локальное понятие, определяемое через предел, то (13.1) можно записать на «языке $\varepsilon-\delta$». Функция *f(x)* называется непрерывной в точке x_0, если для любого положительного числа ε>0 существует такое число $\delta>0$, что для любых *x*, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$ верно неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Разность $x-x_0$ называется приращением аргумента и обозначается Δx. Приращением Δy функции $y=f(x)$ в данной точке x_0 называется разность $\Delta y = f(x)-f(x_0)$ или $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Функция *f(x)* называется ***непрерывной*** в точке $x=x_0$, если приращение функции Δy в точке x_0 является бесконечно малой величиной при $\Delta x\to 0$, т.е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0 \qquad (13.3)$$

Непрерывность некоторых элементарных функций

1) Функция $f(x) = C$, $C = const$ – непрерывная функция на всей области определения.

2) Рациональная функция $f(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$ непрерывна для всех значений x, кроме тех, при которых знаменатель обращается в ноль. Таким образом, функция этого вида непрерывна на всей области определения.

3) Тригонометрические функции $y=sinx$ и $y=cosx$ непрерывны на своей области определения.

4) Показательная функция $y=a^x$ непрерывна при любом значении x.

Также сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на на с. 233 - 234 (часть 5) **§ 44 (2012-2017,2024 годы издания**, глава **VIII**).

Второй вопрос: Свойства непрерывности функции.

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций есть функция, непрерывная в точке x_0.

2) Частное двух непрерывных функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ есть непрерывная функция при условии, что $g(x)$ не равна нулю в точке x_0.

Пример 1. Функция $y=tgx=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ непрерывна для всех значений аргумента x, кроме тех, для которых $\cos x=0$, т.е. кроме значений $x=(2k-1)\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Аналогично, функция $y=ctgx=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ непрерывна для всех значений аргумента x, кроме тех, для которых $\sin x=0$, т.е. кроме значений $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

3) Суперпозиция непрерывных функций есть непрерывная функция.
Это свойство может быть записано следующим образом:

Если $u=f(x)$, $v=g(x)$ – непрерывные функции в точке $x=x_0$, то функция $v=g(f(x))$ является также непрерывной функцией в этой точке.

Непрерывность функции на интервале.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на интервале (отрезке)***, если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

Также сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на на с. 233 - 234 (часть 5) **§ 44 (2012-2017,2024 годы издания**, глава **VIII**).

Третий вопрос: <u>Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции в точке.</u>

Операцию нахождения производной функции называют дифференцированием. Функция, имеющая производную в точке, называется дифференцируемой.

Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке устанавливает следующая теорема:

<u>Теорема: (Необходимое условие существования производной):</u>
Если функция f(x) имеет производную в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке.

<u>Обратное утверждение неверно:</u> функция f(x), непрерывная в точке, может не быть дифференцируемой в этой точке.

Также сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на на с. 234 (часть 5) **§ 44 (2012-2017,2024 годы издания**, глава **VIII**).

Четвёртый вопрос: <u>Алгоритм решения неравенств методом интервалов.</u>

Метод интервалов – метод решения неравенств, основанный на разбиении числовой прямой на интервалы, на каждом из которых выражение сохраняет свой знак.

Часто удобно при решении квадратных неравенств использовать метод интервалов.

Рассмотрим этапы метода интервалов:
- находят корни квадратного трёхчлена ax^2+bx+c и раскладывают на множители;
- отмечают на числовой прямой корни трёхчлена и находят знаки квадратного трёхчлена на каждом интервале;
- выбирают интервал, соответствующий знаку неравенства, и записывают ответ.

Пример:

решить неравенство: $2x^2-7x-4\leq 0$.

Решение. *Найдём корни квадратного трёхчлена* $2x^2-7x-4$
и разложим его на множители по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$:

$$2x^2-7x-4=0;$$

$$D=b^2-4ac=(-7)^2-4\cdot 2\cdot(-4)=49+32=81;$$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-7)-\sqrt{81}}{2\cdot2}=\frac{7-9}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}=-0{,}5;$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-7)+\sqrt{81}}{2\cdot2}=\frac{7+9}{4}=\frac{16}{4}=4;$$

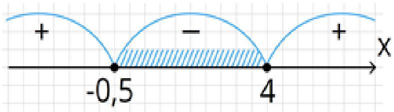
$$2x^2-7x-4=2(x+0{,}5)(x-4);$$

$$2(x+0{,}5)(x-4)=0\,|:2$$

$$(x+0{,}5)(x-4)=0;$$

$$x_1=-0{,}5,\quad x_2=4.$$

Отметим на числовой прямой корни и найдём знаки квадратного трёхчлена на каждом интервале.
Для этого из каждого интервала достаточно взять произвольно по одному значению и подставить вместо x *в трёхчлен.*



На интервале $(-\infty;-0{,}5]$ *возьмём* $x=-2$, *тогда* $2\cdot(-2)^2-7\cdot(-2)-4=2\cdot4+14-4=18>0$.

На интервале $[-0{,}5;4]$ *возьмём* $x=0$, *тогда* $2\cdot0^2-7\cdot0-4=0-0-4=-4<0$.

На интервале $[4;+\infty)$ *возьмём* $x=5$, *тогда* $2\cdot5^2-7\cdot5-4=2\cdot25-35-4=50-39=11>0$.

Квадратный трёхчлен принимает отрицательные и равные нулю значения на интервале $[-0{,}5;4]$.

Ответ: $-0{,}5\le x\le 4$.

Для того, чтобы найти **интервалы, на которых функция возрастает или убывает**, часто используется метод, основанный на **анализе знаков** производной **рассматриваемой функции.**

<u>Практическая часть.</u>

Пятый вопрос: <u>Практическое применение полученных знаний – решение задач.</u>

Задание: (исходные данные):

1. Рассмотреть пример выполнения практического задания (решение задачи № 6), приведенной в § **44** 1-ого учебника раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины «Математика» (с.234).

2. Решить задачи:

ЗАДАНИЕ. *Функция $y = f(x)$ задана различными аналитическими выражениями в различных областях изменения независимой переменной. Найти точки разрыва функции, если они существуют, и построить ее график.*

$$f(x)=\begin{cases} 2 & \text{при} \quad x<-1, \\ 2-2x & \text{при} \quad -1\le x<1, \\ \ln x & \text{при} \quad 1\le x. \end{cases}$$

Заключительная часть:

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Выдать задание на самоподготовку (домашнее задание).

Задание на самоподготовку (домашнее задание):

1. Детально проработать, законспектировать материал занятия, размещенный в данном план-конспекте, в учебнике, указанном на с.2 Конспекта занятия.
2. Решить задачи, заданные преподавателем.
3. Подготовиться к опросу по пройденному материалу.