1 курс (2 семестр)

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения лекционного занятия по дисциплине
«Математика»

Раздел 7. Многогранники и тела вращения.

Тема № 7.3: «Параллелепипед, куб. Сечение куба, параллелепипеда»

<u>Лекционное занятие № 6</u>

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань
2025

Лекционное занятие № 6
по Теме № 7.3 «Параллелепипед, куб. Сечение куба, параллелепипеда»

Цель занятия: изучить со студентами основные сведения о параллелепипедах, кубах, сечение параллелепипеда, куба.

Вид занятия: классно-групповое, комбинированные (по проверке знаний, умений по пройденному материалу, по изучению и первичному закреплению нового материала).

Метод проведения занятия: доведение теоретических сведений, выполнение практических заданий.

Время проведения: 2 ч

Основные вопросы:

1. Параллелепипед. Свойства прямоугольного параллелепипеда. Сечение параллелепипеда.
2. Куб. Сечение куба.
3. Практическое применение полученных знаний – решение задач.

Литература:

1. [2 учебник раздела «Дополнительной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины]: *Гусев, В. А.* Математика. Геометрия. Базовый уровень: 10—11 классы : учебник для среднего общего образования / В. А. Гусев, И. Б. Кожухов, А. А. Прокофьев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 281 с. — (Общеобразовательный цикл). — ISBN 978-5-534-16085-7. — Текст : непосредственный// Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/viewer/matematika-geometriya-bazovyy-uroven-10-11-klassy-568462#page/2, с.154-155 **§ 2.7 Главы 2.**

Примерный расчет времени:

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

Вступительная часть:

Занятие начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (нового материала), закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы, опроса по пройденному материалу.

Основная часть (теоретическая, практическая):

Первый вопрос: <u>Параллелепипед. Свойства прямоугольного параллелепипеда. Сечение параллелепипеда.</u>

Параллелепипедом называется многогранник, у которого 6 граней — параллелограммы.

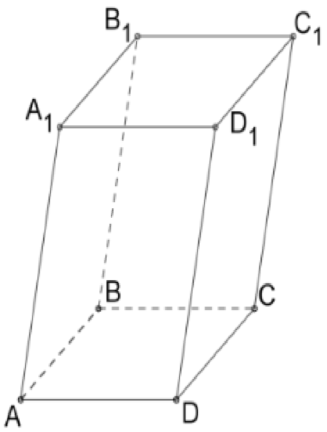


Рис. 1

У параллелепипеда, как отмечено, 6 граней, 8 вершин и 12 рёбер (рис. 1).

Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются смежными, а не имеющие общих рёбер — противоположными.

Обычно выделяют какие-нибудь две противоположные грани и называют их основаниями, а остальные грани — боковыми гранями параллелепипеда.

Рёбра параллелепипеда, не принадлежащие основаниям, называют боковыми рёбрами.

Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется диагональю параллелепипеда (рис. 2).

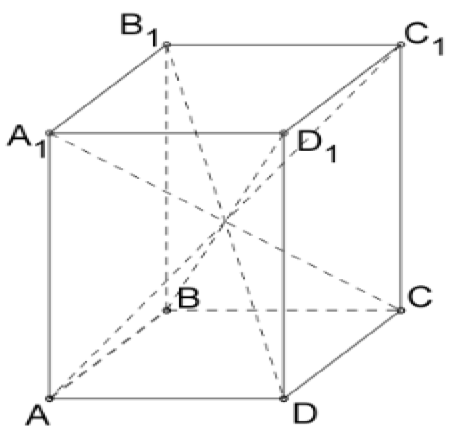


Рис. 2

В зависимости от видов параллелограммов и их расположения выделяют разные виды параллелепипедов: параллелепипеды могут быть прямые и наклонные.

У **прямых** параллелепипедов боковые грани — прямоугольники (рис. 2),
у **наклонных** — параллелограммы (рис. 1).

Прямой параллелепипед, у которого основанием тоже является прямоугольник, называется **прямоугольным параллелепипедом**.

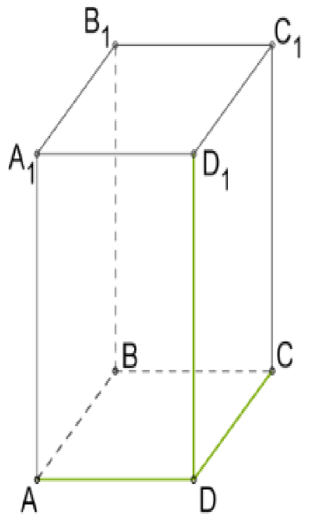


Рис. 3

Длины непараллельных рёбер прямоугольного параллелепипеда называются его **линейными размерами** (**измерениями**).
У прямоугольного параллелепипеда — три линейных размера: DA, DC, DD_1 (рис. 3).

Свойства параллелепипеда:
- противоположные грани параллелепипеда равны и параллельны.
- Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.
- Боковые грани прямого параллелепипеда — прямоугольники.

Параллелепипедом называется призма, основаниями которой служат параллелограммы. Параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны к плоскостям оснований, называется *прямым*. В противном случае — параллелепипед называется *наклонным*. Прямой параллелепипед, основания которого — прямоугольники, называется *прямоугольным*. Все его грани — прямоугольники, и длины трех ребер, выходящих из одной вершины, называются *измерениями* параллелепипеда.

Прямоугольный параллелепипед, все три измерения которого равны между собой, называется *кубом*.

Некоторые свойства параллелепипеда.

Теоремы. 1. В параллелепипеде противоположные грани равны и параллельны.

2. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

3. Сумма квадратов всех диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов всех его ребер, т. е.

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2.$$

4. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

Площадь боковой поверхности (или просто *боковая поверхность*) *призмы* (параллелепипеда) — это сумма площадей всех ее боковых граней.

Площадью полной поверхности (или просто *полная поверхность*) *призмы* (параллелепипеда) называется сумма ее боковой поверхности и площадей оснований.

Плоскостью сечения многогранника можно назвать любую плоскость, по обе стороны которой находятся точки многогранника.
Секущая плоскость пересекает грани многогранников по отрезкам.

Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется **сечением многогранника**.

Так как у тетраэдра 4 грани, то сечением тетраэдра может быть треугольник (рис. 1) или четырёхугольник (рис. 2).

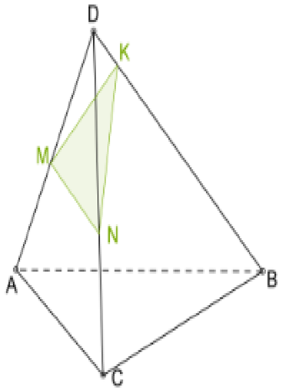


Рис. 1

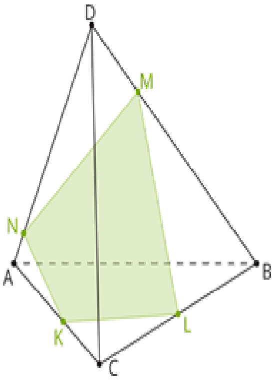


Рис. 2

У параллелепипеда 6 граней, поэтому сечением этого многогранника может быть треугольник (рис. 3), четырёхугольник (рис. 4), пятиугольник (рис. 5) или шестиугольник (рис. 6).

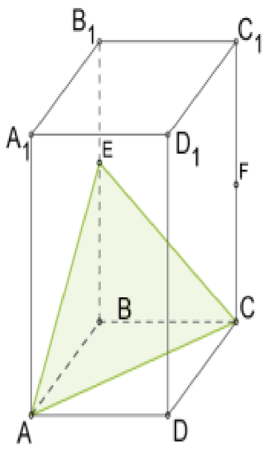


Рис. 3

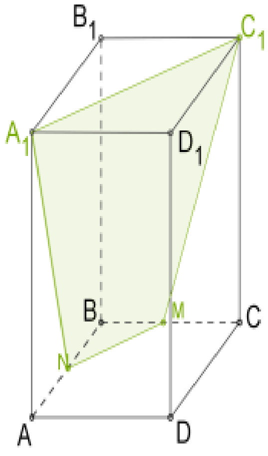


Рис. 4

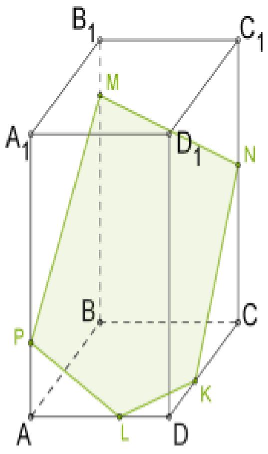


Рис. 5

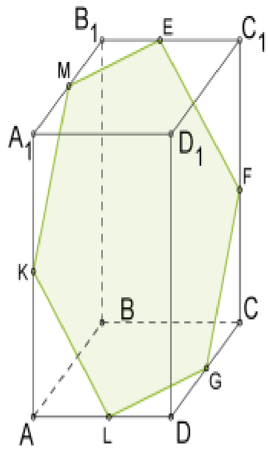


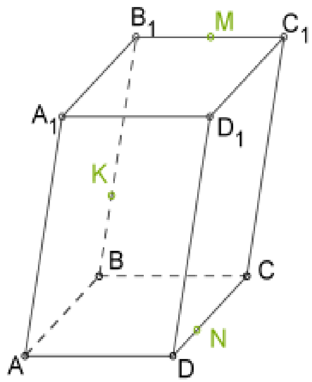
Рис. 6

При построении сечения надо вспомнить следующие знания из предыдущих тем.

1. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то прямая находится в этой плоскости.
2. Если две плоскости имеют общую точку, то эти плоскости пересекаются по прямой.
3. Если плоскость пересекает две параллельные плоскости, то линии пересечения параллельны.

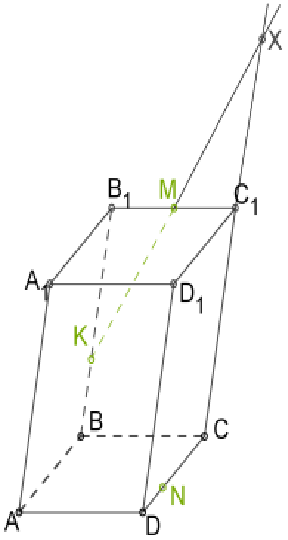
Пример:

Задача
Построить сечение параллелепипеда плоскостью, которая проходит через точки K, M и N.



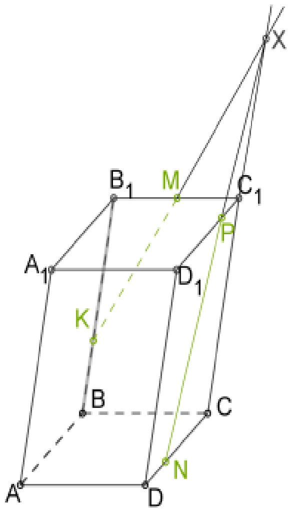
1. Проводим MK, так как обе точки находятся в одной плоскости;

2. $MK \cap CC_1 = X$ — непараллельные прямые в одной плоскости пересекаются;



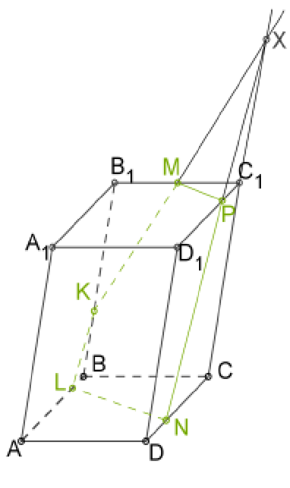
3. проводим XN, так как обе точки находятся в одной плоскости;

4. $XN \cap D_1C_1 = P$;

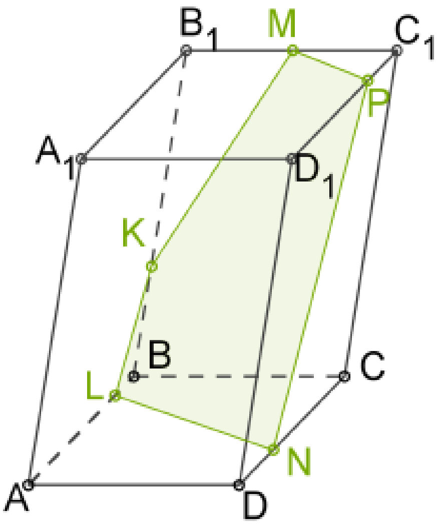


5. проводим MP, так как обе точки находятся в одной плоскости;

6. через точку N в плоскости основания $NL \parallel MP$, так как линии пересечения параллельных плоскостей с третьей плоскостью должны быть параллельны;

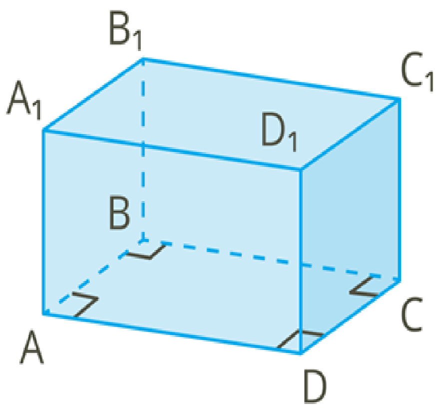


7. соединяем N *и* L *и получаем сечение* $MPNLK$*.*



Прямая призма, основанием которой является прямоугольник, называется **прямоугольным параллелепипедом**.

Длины трёх рёбер, имеющих общую вершину, называются **измерениями** прямоугольного параллелепипеда.



Например, три измерения — это длины трёх рёбер DA, DC, DD_1.

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений:
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$,
где a, b, c — измерения прямоугольного параллелепипеда, т. е. его длина, ширина и высота.
На рисунке: $DB_1{}^2 = DA^2 + DC^2 + DD_1{}^2$.

У прямоугольного параллелепипеда все диагонали равны:
$DB_1 = CA_1 = AC_1 = BD_1$.

Также сведения по данному вопросу представлены во 2-ом учебнике раздела «Дополнительной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с.154-155 **§ 2.7 Главы 2.**

Второй вопрос: Куб. Сечение куба.

Прямоугольный параллелепипед, все три измерения которого равны между собой, называется кубом.

Все грани куба – это равные друг другу квадраты.

Кубу можно дать определение различными способами, каждый из которых только подчеркнёт тот или иной класс тел в пространстве, выделит основные признаки и особенности:

- многогранник, у которого все рёбра равны, а грани попарно перпендикулярны;
- прямая призма, все грани которой есть квадраты;
- прямоугольный параллелепипед, все рёбра которого равны.

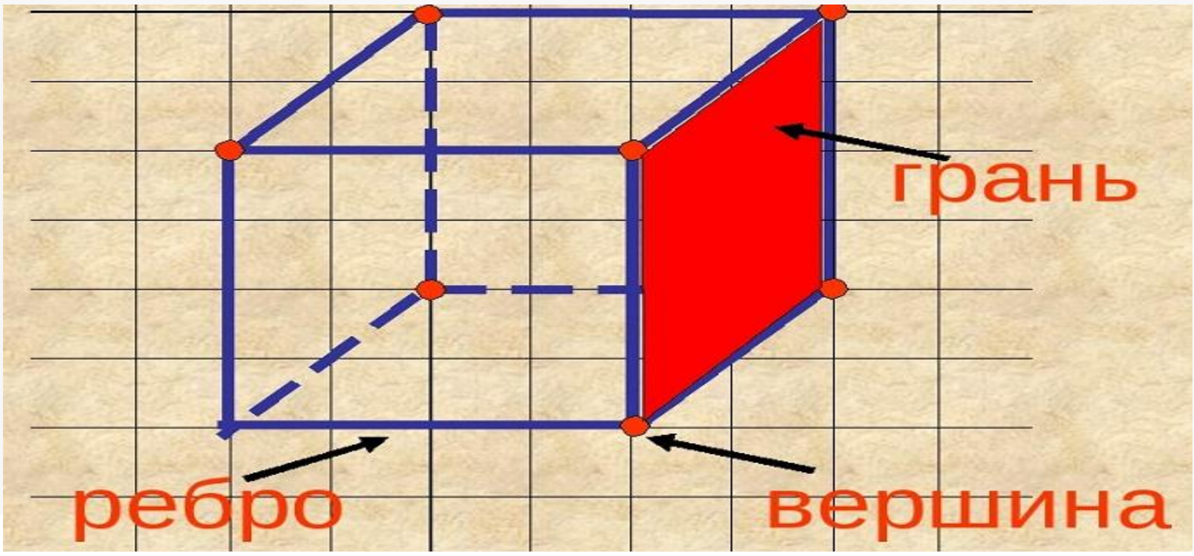
Всеми этими и многими другими подобными формулировками геометрия позволяет описывать одну и ту же фигуру в пространстве.

Элементы куба.

Основными элементами многогранника считаются грани, рёбра, вершины.

Грань.

Плоскости, образующие поверхность куба, называются гранями. Другое название – стороны.

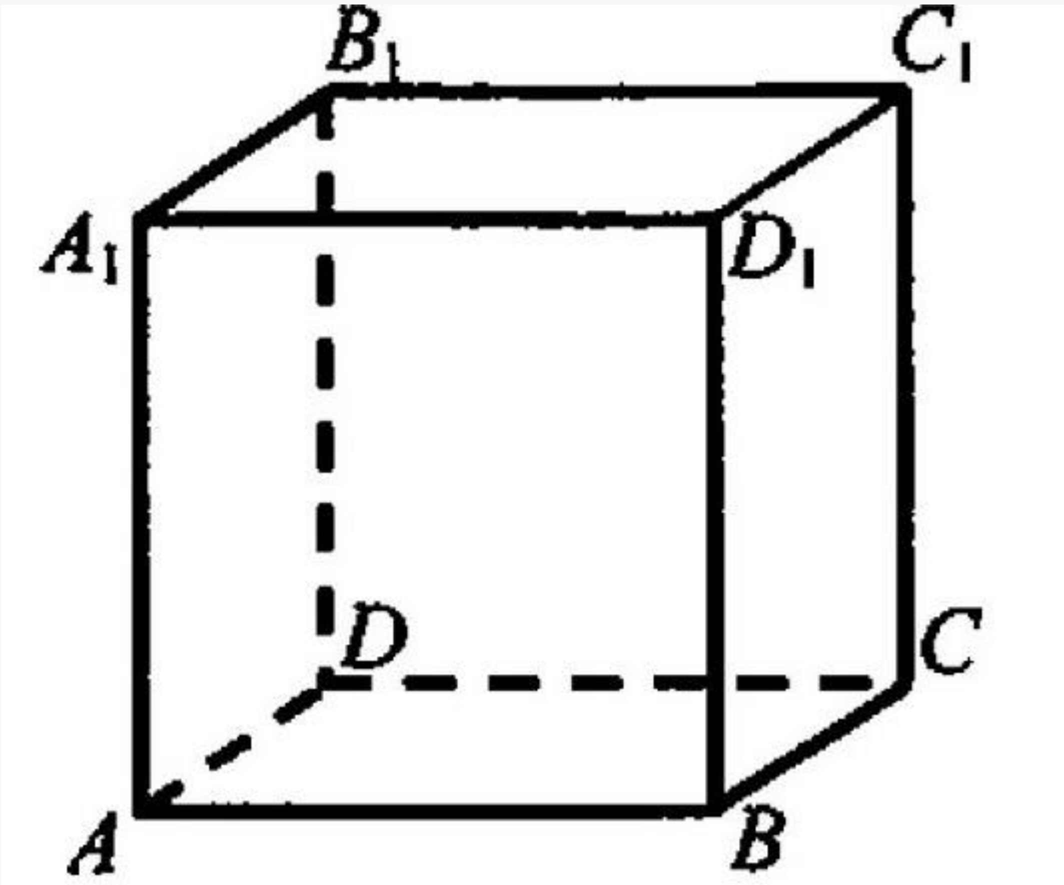


Интересно, сколько граней у куба и каковы их особенности. **Всего граней шесть.** Две из них, параллельные друг другу, считаются основаниями, остальные – боковыми.

Грани куба попарно перпендикулярны, являются квадратами, равны между собой.

Ребро.

Линии пересечения сторон называются рёбрами.



Рёбер у куба **двенадцать.** Они имеют одинаковые длины. Те из них, что обладают общим концом, расположены под прямым углом по отношению к любому из двух остальных.

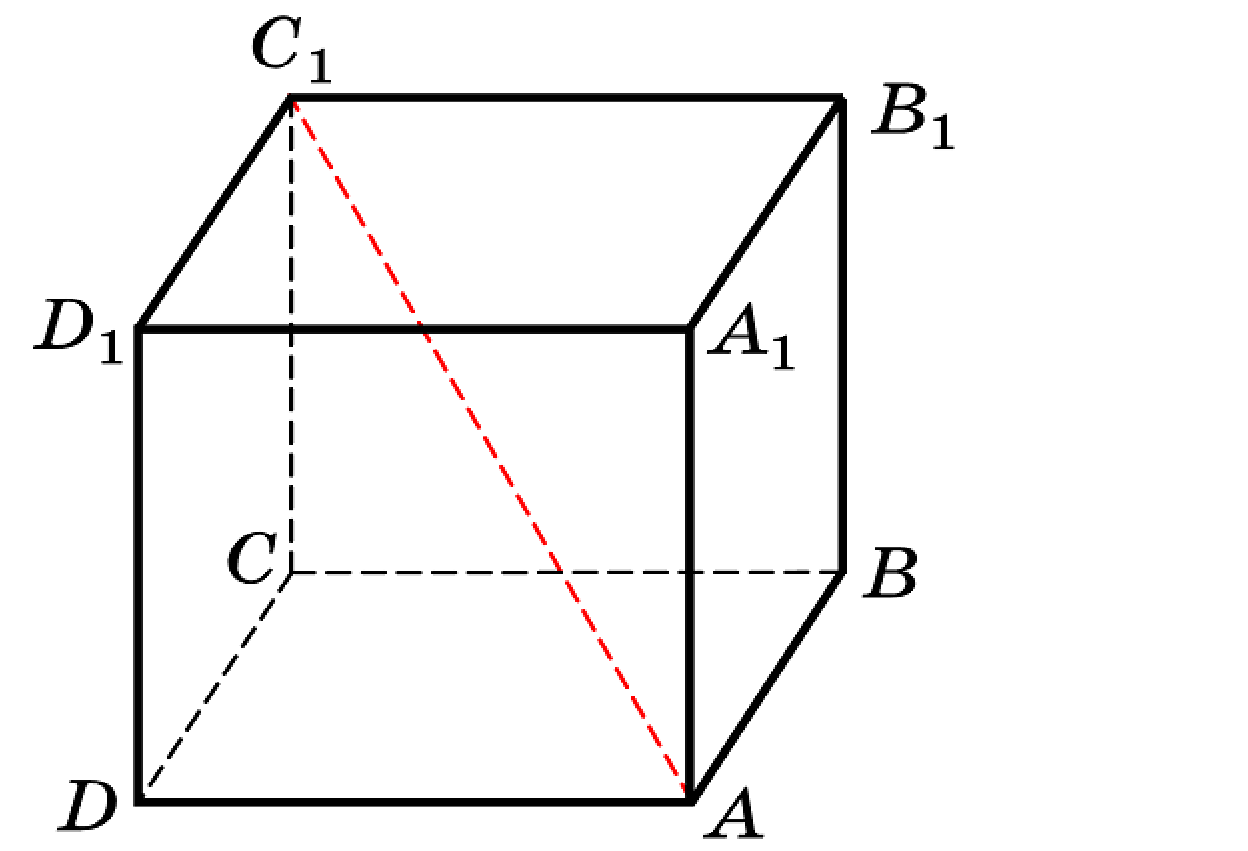
Рёбра могут пересекаться в вершине, быть параллельными. Не лежащие в одной грани ребра, являются скрещивающимися.

Вершина.

Точки пересечения рёбер называются вершинами. Их число равно восьми.

Центр грани.

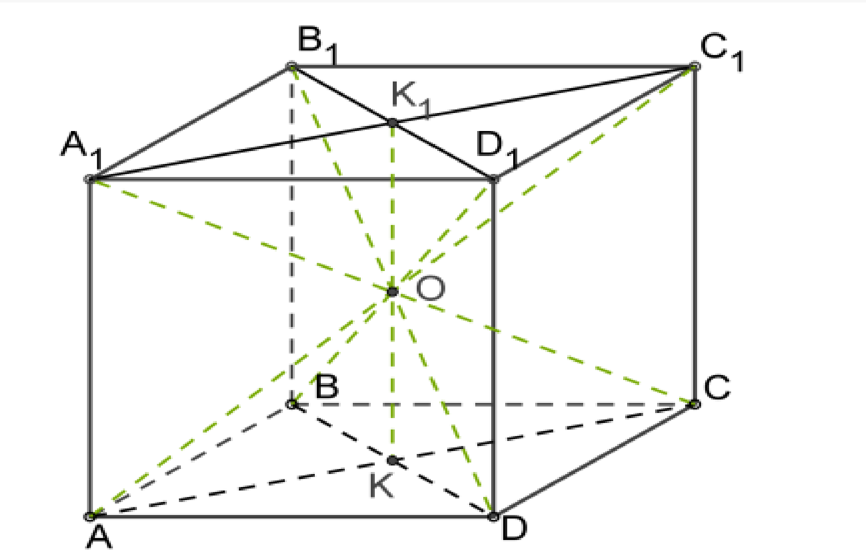
Отрезок, соединяющий две вершины, не являющийся ребром, называется диагональю.



Пересечение диагоналей грани считается центром грани – точкой, равноудалённой от всех вершин и сторон квадрата. Это есть центр симметрии грани.

Центр куба.

Пересечение диагоналей куба является его центром – точкой, равноудалённой от всех вершин, рёбер и сторон многогранника.



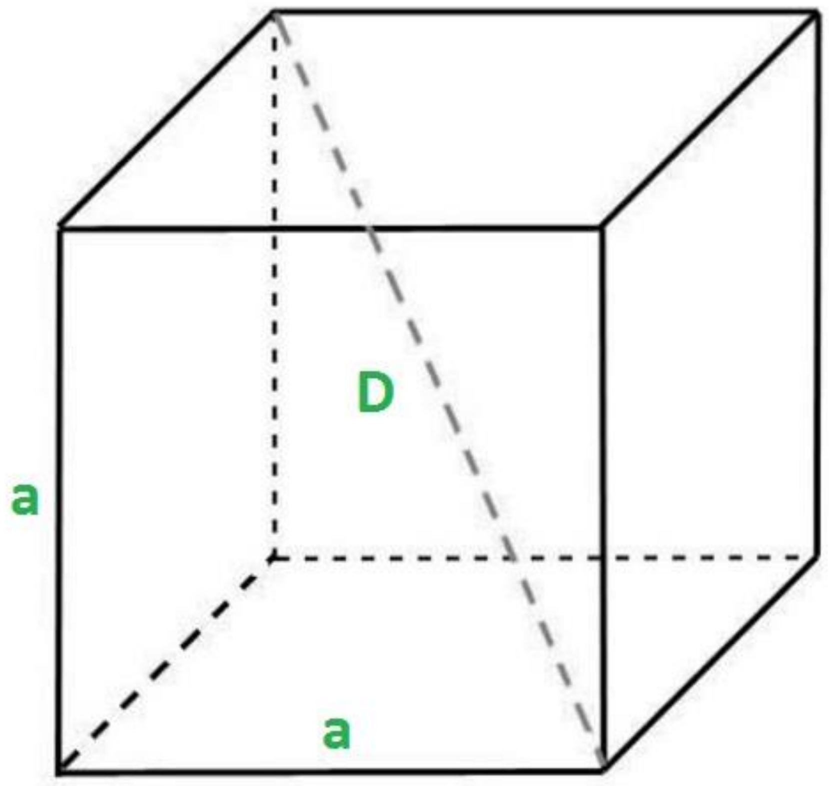
Это есть центр симметрии куба.

Ось куба.

Рассматриваемый многогранник имеет несколько осей ортогональной (под прямым углом) симметрии. К ним относятся: диагонали куба и прямые, проходящие через его центр параллельно рёбрам.

Диагональ куба.

Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной стороне, называется диагональю рассматриваемого многогранника.



Учитывая, что ребра куба имеют равные измерения a, можно найти длину диагонали:

$$D = a\sqrt{3}.$$

Формула доказывается с помощью дважды применённой теоремы Пифагора.

Диагональ куба - одна из осей симметрии.

Все диагонали куба равны между собой и точкой пересечения делятся пополам.

Диагональ грани куба.

Длина диагонали грани в √2 раз больше ребра, то есть:

$$d = a\sqrt{2}.$$

Эта формула доказывается также с помощью теоремы Пифагора.

Объем куба

Как для любого параллелепипеда, объём куба равен произведению всех трёх измерений, которые в данном случае равны:

$$V = a^3$$

Периметр куба

Сумма длин всех рёбер равна:

$$P = 12a$$

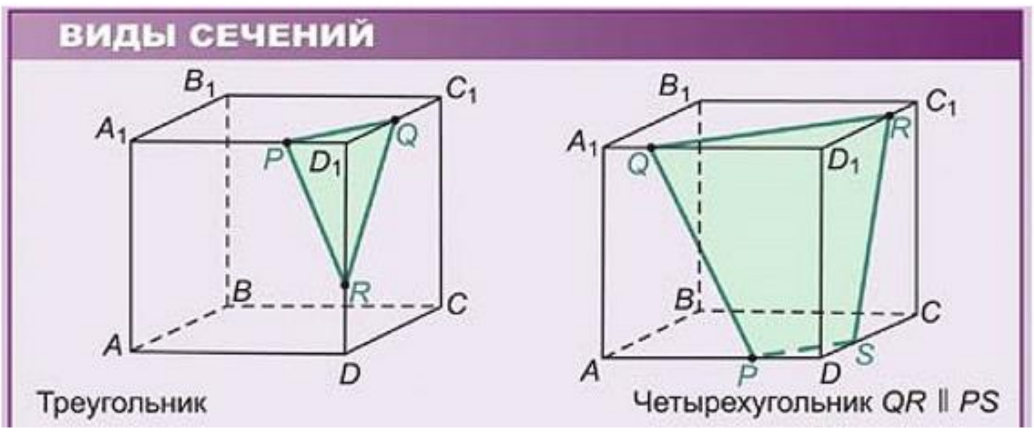
Площадь поверхности

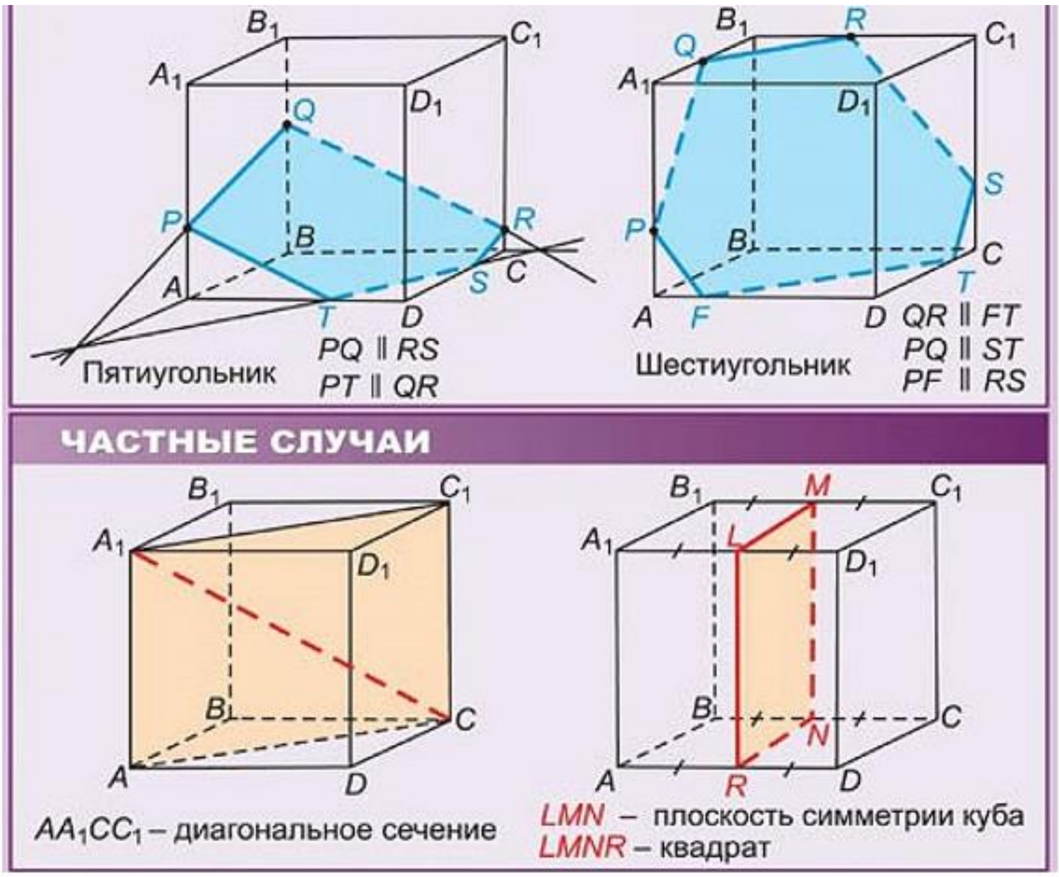
Сумма площадей всех граней называется площадью поверхности куба. Она равна:

$$S = 6a^2.$$

Свойства куба

Плоскость, рассекающая куб на две части, есть сечение. Его форма выглядит как выпуклый многоугольник.





Построение сечений необходимо для решения многих задач. Как правило, используется метод следов или условие параллельности прямых и плоскостей.

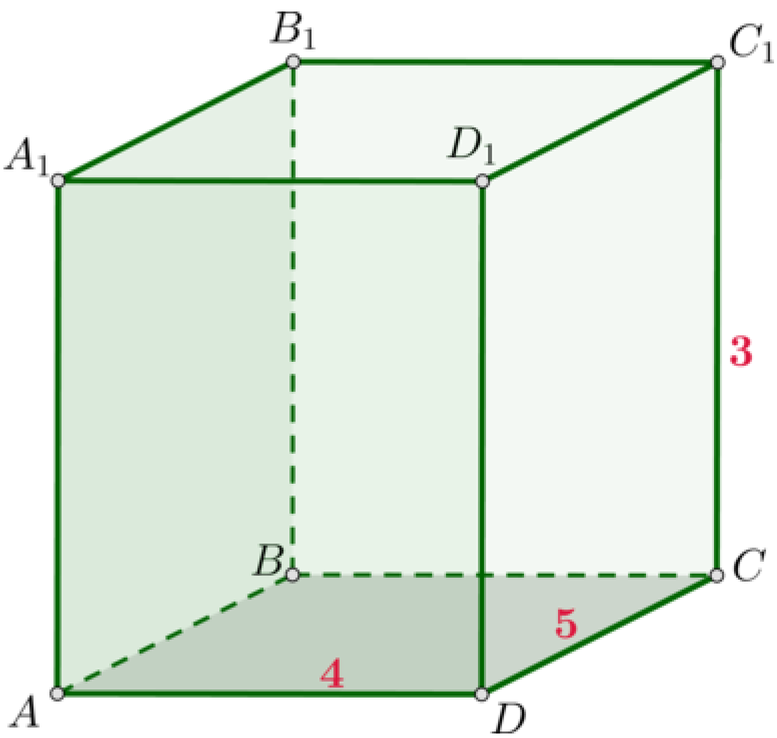
Сведения о построении сечений куба представлены в Презентации.

Третий вопрос: **<u>Практическое применение полученных знаний – решение задач.</u>**

<u>Пример решения задачи:</u>

Пример:

Задача: Дан прямоугольный параллелепипед, стороны основания которого равны 4 и 5, а боковое ребро равно 3. Найдите наибольшую площадь его грани.



Все варианты для площадей его граней – это всевозможные попарные произведения чисел 3,4,5 , то есть 3*4, 4*5 или 3*5. Среди этих произведений наибольшим является 4*5=20.

Ответ: 20.

Задание: (исходные данные):

1. Привести примеры параллелепипедов, кубов в окружающем мире, в строительстве зданий, сооружений.
2. Решить задачу, аналогичную рассмотренной в примере выше: стороны основания которого равны 5 и 6, а боковое ребро равно 4.

Заключительная часть.

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Выдать задание на самоподготовку (домашнее задание).

Задание на самоподготовку (домашнее задание):

1. Детально проработать материал занятия, размещенный в данном план-конспекте, в учебнике, размещенном на с.2 текущего документа.
2. Подготовиться к опросу по пройденному материалу.