1 курс (2 семестр)

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения лекционных занятий по дисциплине
«Математика»

**Раздел 7. Многогранники и тела вращения.**

**Тема № 7.14: «Объёмы и площади поверхностей тел»**

**Лекционные занятия № 18-20**

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань
2026

**Лекционные занятия № 18-20**
**по Теме № 7.14 «Объёмы и площади поверхностей тел»**

**Цель занятий:** изучить со студентами основные сведения об объёме и площади поверхностей многогранников, геометрических тел в пространстве

**Виды занятий:** классно-групповые, комбинированные (по проверке знаний, умений по пройденному материалу, по изучению и первичному закреплению нового материала).

**Методы проведения занятий:** доведение теоретических сведений, выполнение практических заданий.

**Время проведения:** 6 ч (3 занятия по 2 ч)

## Основные вопросы:

1. Объём наклонной призмы.
2. Объём пирамиды.
3. Объём конуса.
4. Объём шара.
5. Объём шарового сегмента, шарового слоя, шарового сектора.
6. Площадь боковой, полной поверхности, объем прямоугольного параллелепипеда, куба.
7. Площадь боковой, полной поверхности призмы.
8. Площадь боковой, полной поверхности пирамиды.
9. Объем, площадь боковой, полной поверхности цилиндра.
10. Площадь боковой, полной поверхности конуса.
11. Площадь сферы.
12. Практическое применение полученных знаний – решение задач.

## Литература:

**1.** [2 учебник раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины]: Атанасян Л.С. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия.10-11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровень/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – Москва: Просвещение, 2024.-287с., ISBN 978-5-09-112137-7. —Текст : электронный // ЭБС Лань — URL: https://e.lanbook.com/book/408659.

## Примерный расчет времени (по каждому занятию):

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

**Вступительная часть (по каждому занятию):**

Занятие начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (нового материала), закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы, опроса по пройденному материалу.

**Основная часть (теоретическая, практическая):**

**Первый вопрос:** **Объём наклонной призмы.**

Сведения по данному вопросу представлены во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с.126-127 (часть 1) **§ 3, п.57** (**2024**,**2019** годы издания, **глава V**), с.167-168, **§ 3, п.79** (**2012-2014** годы издания, глава **VII**).

**Теорема**

**Объём наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту.**

**Замечание**

Для наклонной призмы существует и другой способ вычисления объёма, а именно: объём наклонной призмы равен произведению бокового ребра на площадь сечения призмы плоскостью, перпендикулярной к боковым рёбрам и пересекающей их. Коротко говорят так: объём наклонной призмы равен произведению бокового ребра на площадь перпендикулярного ему сечения (см. задачу 475).

**Второй вопрос:** **Объём пирамиды.**

Сведения по данному вопросу представлены во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с.128-129 (часть 1), **§ 3, п.58** (**2024**,**2019** годы издания, **глава V**), с.168-169, **§ 3, п.80** (**2012-2014** годы издания, глава **VII**).

**Теорема**

**Объём пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.**

**Следствие**

**Объём $V$ усечённой пирамиды, высота которой равна $h$, а площади оснований равны $S$ и $S_1$, вычисляется по формуле**

$$V = \frac{1}{3}h\,(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1}).$$

**Третий вопрос: <u>Объём конуса.</u>**

Сведения по данному вопросу представлены во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с.129-130 (часть 1), **§ 3, п.59** (**2024**,**2019** годы издания, **глава V**), с.170-171, **§ 3, п.81** (**2012-2014** годы издания, глава **VII**).

**Теорема**

**Объём конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.**

**Следствие**

**Объём $V$ усечённого конуса, высота которого равна $h$, а площади оснований равны $S$ и $S_1$, вычисляется по формуле**

$$V = \frac{1}{3}h\,(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1}).$$

**Четвёртый вопрос: <u>Объём шара.</u>**

Сведения по данному вопросу представлены во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с.133-134 (часть 1), **§ 4, п.60** (**2024**,**2019** годы издания, **глава V**), с.174, **§ 4, п.82** (**2012-2014** годы издания, глава **VII**).

**Теорема**

**Объём шара радиуса $R$ равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.**

**Пятый вопрос: <u>Объём шарового сегмента, шарового слоя, шарового сектора.</u>**

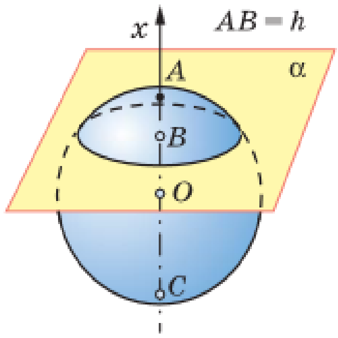
Сведения по данному вопросу представлены во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на

с.134-135 (часть 1), **§ 4, п.61** (**2024,2019** годы издания, **глава V**), с.174-175, **§ 4, п.83** (**2012-2014** годы издания, глава **VII**).

а) **Шаровым сегментом** называется часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью. На рисунке 150 секущая плоскость $\alpha$, проходящая через точку $B$, разделяет шар на два шаровых сегмента. Круг, получившийся в сечении, называется **основанием** каждого из этих сегментов, а длины отрезков $AB$ и $BC$ диаметра $AC$, перпендикулярного к секущей плоскости, называются **высотами** сегментов.

Если радиус шара равен $R$, а высота сегмента равна $h$ (на рисунке 150 $h = AB$), то объём $V$ шарового сегмента вычисляется по формуле

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right).$$



Шаровой сегмент

Рис. 150

▼ Действительно, проведём ось $Ox$ перпендикулярно к плоскости $\alpha$ (см. рис. 150). Тогда площадь $S(x)$ произвольного сечения шарового сегмента плоскостью, перпендикулярной к оси $Ox$, выражается формулой (1) при $R - h \leqslant x \leqslant R$. Применяя основную формулу для вычисления объёмов тел при $a = R - h$, $b = R$, получаем:

$$V = \pi\int_{R-h}^{R}(R^2 - x^2)\,dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-h}^{R} =$$

$$= \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right). \quad \triangle$$

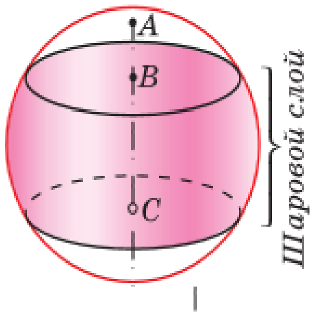
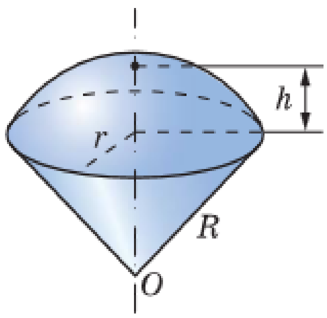


Рис. 151

б) **Шаровым слоем** называется часть шара, заключённая между двумя параллельными секущими плоскостями (рис. 151). Круги, получившиеся в сечении шара этими плоскостями, называются **основаниями** шарового слоя, а расстояние между плоскостями — **высотой** шарового слоя.

Объём шарового слоя можно вычислить как разность объёмов двух шаровых сегментов. Например, объём шарового слоя, изображённого на рисунке 151, равен разности объёмов шаровых сегментов, высоты которых равны $AC$ и $AB$.



Шаровой сектор

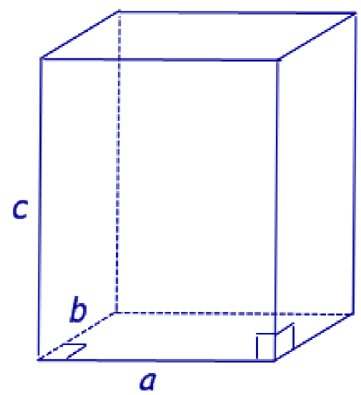
Рис. 152

в) **Шаровым сектором** называется тело, полученное вращением кругового сектора с углом, меньшим 90°, вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов (рис. 152). Шаровой сектор состоит из шарового сегмента и конуса. Если радиус шара равен $R$, а высота шарового сегмента равна $h$, то объём $V$ шарового сектора вычисляется по формуле

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

**Шестой вопрос: <u>Площадь боковой, полной поверхности, объём прямоугольного параллелепипеда, куба.</u>**

**<u>Площадь боковой, полной поверхности прямоугольного параллелепипеда.</u>**




**Формулы для объема, площади боковой и полной поверхности:**

$$V = abc,$$

$$S_{бок} = 2ac + 2bc,$$

$$S_{полн} = 2ac + 2bc + 2ab,$$

где

$a, b$ – длины ребер основания параллелепипеда,

$c$ - высота параллелепипеда.

**Теорема**

**Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.**

**Следствие 1**

**Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.**

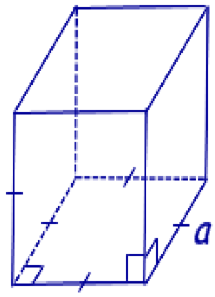
В самом деле, примем грань с рёбрами $a$ и $b$ за основание. Тогда площадь $S$ основания равна $ab$, а высота $h$ параллелепипеда равна $c$. Следовательно,

$$V = abc = Sh.$$

**Следствие 2**

**Объём прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания на высоту.**

**<u>Площадь боковой, полной поверхности, объём куба.</u>**




**Формулы для объема, площади боковой и полной поверхности:**

$$V = a^3,$$

$$S_{\text{бок}} = 4a^2,$$

$$S_{\text{полн}} = 6a^2,$$

где $a$ – длина ребра куба.

Также сведения о прямоугольном параллелепипеде представлены во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с.53-55 (часть 1), **§ 3, п.24** (**2024**,**2019** годы издания, **глава II**), с.25-27, **§ 4, п.13** (**2012-2014** годы издания, глава **III**).

**Седьмой вопрос:** **<u>Площадь боковой, полной поверхности призмы.</u>**

Сведения по данному вопросу представлены во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с.134-135 (часть 1), **§ 4, п.61** (**2024**,**2019** годы издания, **глава V**), с.64-65, **§ 1, п.30** (**2012-2014** годы издания, глава **III**).

**Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех её граней, а площадью боковой поверхности призмы — сумма площадей её боковых граней. Площадь $S_{\text{полн}}$ полной поверхности выражается через площадь $S_{\text{бок}}$ боковой поверхности и площадь $S_{\text{осн}}$ основания призмы формулой**

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}.$$

**Теорема**

**Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.**

**Доказательство**

Боковые грани прямой призмы — прямоугольники, основания которых — стороны основания призмы, а высоты равны высоте $h$ призмы. Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей указанных прямоугольников, т. е. равна сумме произведений сторон основания на высоту $h$. Вынося множитель $h$ за скобки, получим в скобках сумму сторон основания призмы, т. е. его периметр $P$. Итак,

$$S_{бок} = Ph.$$

Теорема доказана.

**Восьмой вопрос:** **<u>Площадь боковой, полной поверхности пирамиды.</u>**

Сведения по данному вопросу представлены во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с.72-75 (часть 1), **§ 2, п.32,33,34** (**2024**,**2019** годы издания, **глава V**), с.69-71, **§ 2, п.32,33,34** (**2012-2014** годы издания, глава **III**).

**Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех её граней (т. е. основания и боковых граней), а площадью боковой поверхности пирамиды — сумма площадей её боковых граней. Очевидно, $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$.**

**Теорема**

**Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.**

**Теорема**

**Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.**

**Девятый вопрос:** **<u>Объём, площадь боковой, полной поверхности цилиндра.</u>**

Сведения по данному вопросу представлены во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на

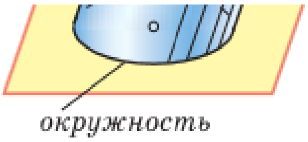
с.91-92 (часть 1), **§ 1, п.39** (**2024,2019** годы издания, **глава IV**), с.132-133, **§1, п.60** (**2012-2014** годы издания, глава **VI**).

**Теорема**

**Объём цилиндра равен произведению площади основания на высоту.**

$S_{осн} = \pi r^2$.

$V = S_{осн} \cdot h$.

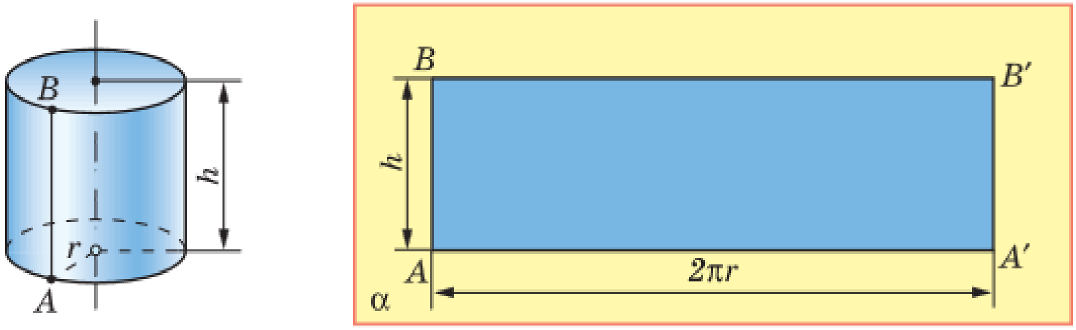


*б)*

Рис. 104

На рисунке 105, *а* изображён цилиндр. Представим себе, что его боковую поверхность разрезали по образующей $AB$ и развернули таким образом, что все образующие оказались расположенными в некоторой плоскости $\alpha$ (рис. 105, *б*). В результате в плоскости $\alpha$ получится прямоугольник $ABB'A'$. Стороны $AB$ и $A'B'$ прямоугольника представляют собой два края разреза боковой поверхности цилиндра по образующей $AB$. Этот прямоугольник называется **развёрткой боковой поверхности цилиндра**. Основание $AA'$ прямоугольника является развёрткой окружности основания цилиндра, а высота $AB$ — образующей цилиндра, поэтому $AA' = 2\pi r$, $AB = h$, где $r$ — радиус цилиндра, $h$ — его высота.

**За площадь боковой поверхности цилиндра принимается площадь её развёртки.**



*а)* *б)*

Развёртка боковой поверхности цилиндра

**Так как площадь прямоугольника $ABB'A'$ равна $AA' \cdot AB = 2\pi rh$, то для вычисления площади $S_{бок}$ боковой поверхности цилиндра радиуса $r$ и высоты $h$ получается формула**

$$S_{бок} = 2\pi rh.$$

**Итак, площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра.**

**Площадью полной поверхности цилиндра называется сумма площадей боковой поверхности и двух оснований. Так как площадь каждого основания равна $\pi r^2$, то для вычисления площади $S_{цил}$ полной поверхности цилиндра получаем формулу**

$$S_{цил} = 2\pi r(r + h).$$

**Десятый вопрос:** **<u>Площадь боковой, полной поверхности конуса.</u>**

Сведения по данному вопросу представлены во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с.95-97 (часть 1), **§ 1, п.41,42** (**2024**,**2019** годы издания, **глава IV**), с.136-138, **§2, п.62,63** (**2012-2014** годы издания, глава **VI**).

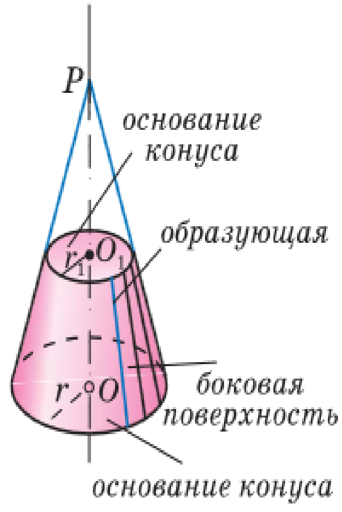
**Таким образом, площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую.**

**Площадью полной поверхности конуса называется сумма площадей боковой поверхности и основания. Для вычисления площади $S_{кон}$ полной поверхности конуса получается формула**

$$S_{кон} = \pi r (l + r).$$

Возьмём произвольный конус и проведём секущую плоскость, перпендикулярную к его оси. Эта плоскость пересекается с конусом по кругу и разбивает конус на две части. Одна из частей (верхняя на рисунке 112) представляет собой конус, а другая называется **усечённым конусом**. Основание исходного конуса и круг, полученный в сечении этого конуса плоскостью, называются **основаниями** усечённого конуса, а отрезок, соединяющий их центры,— **высотой** усечённого конуса.

Часть конической поверхности, ограничивающая усечённый конус, называется его **боковой поверхностью**, а отрезки образующих конической поверхности, заключённые между основаниями, называются **образующими** усечённого конуса. Все образующие усечённого конуса равны друг другу (докажите это самостоятельно).




Усечённый конус

Рис. 112

**Докажем, что площадь боковой поверхности усечённого конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую, т. е.**

$$S_{бок} = \pi (r + r_1) l,$$

**где $r$ и $r_1$ — радиусы оснований, $l$ — образующая усечённого конуса.**

**Одиннадцатый вопрос:** **<u>Площадь сферы.</u>**

Сведения по данному вопросу представлены во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на

с.135-136 (часть 1), **§ 4, п.62** (**2024**,**2019** годы издания, **глава V**), с.176-177, **§ 4, п.84** (**2012-2014** годы издания, глава **VII**).

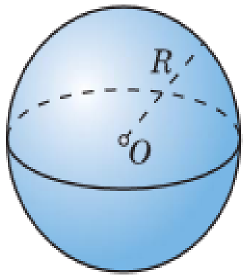
## 43 Сфера и шар

**Сферой** называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки (рис. 115).

Данная точка называется **центром сферы** (точка $O$ на рисунке 115), а данное расстояние — **радиусом сферы**. Радиус сферы часто обозначают латинской буквой $R$.

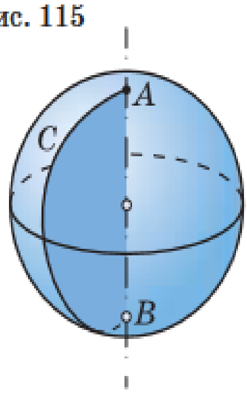
Любой отрезок, соединяющий центр и какую-нибудь точку сферы, также называется радиусом сферы. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр, называется **диаметром сферы**. Очевидно, диаметр сферы равен $2R$. Отметим, что сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг её диаметра (рис. 116).

Тело, ограниченное сферой, называется **шаром**. Центр, радиус и диаметр сферы называются также центром, радиусом и диаметром шара. Очевидно, шар радиуса $R$ с центром $O$ содержит все точки пространства, которые расположены от точки $O$ на расстоянии, не превышающем $R$ (включая и точку $O$), и не содержит других точек.




Сфера радиуса $R$ с центром $O$

Рис. 115




Сфера получена вращением полуокружности $ACB$ вокруг диаметра $AB$

Рис. 116

**Двенадцатый вопрос: <u>Практическое применение полученных знаний – решение задач.</u>**

**Задание: (исходные данные):**

**1.** Привести примеры призм, пирамид, параллелепипедов, кубов, цилиндров, конусов, сфер, шаров в окружающем мире, в строительстве зданий, сооружений.

**2.** Решить задачи № 388,389,390 с. 111 Учебника 2019-2024 г.в., № 593,594,595 с. 152 Учебника 2012- 2014 г.в.

**Заключительная часть (по каждому занятию).**

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Выдать задание на самоподготовку (домашнее задание).

**Задание на самоподготовку (домашнее задание, по каждому занятию):**

1. Детально проработать материал занятия, размещенный в данном план-конспекте, необходимые сведения учебника, представленного на с.2 текущего документа.
2. Подготовиться к опросу по пройденному материалу.