1 курс

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения лекционного занятия № 22 по дисциплине
«Математика»

Раздел 8. Первообразная функции, ее применение.

Тема № 8.1: «Первообразная функции. Правила нахождения первообразных»

<u>Лекционное занятие № 22</u>

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань
2025

Лекционное занятие № 22
по Теме № 8.1 «Первообразная функции. Правила нахождения первообразных»

Цель занятия: изучить со студентами понятие первообразной функции, правила нахождения первообразных (правила интегрирования)

Вид занятия: классно-групповое, комбинированное (по проверке знаний, умений по пройденному материалу, по изучению и первичному закреплению нового материала).

Метод проведения занятия: доведение теоретических сведений, выполнение практических заданий.

Время проведения: 2 ч

Основные вопросы:

1. Задача о восстановлении закона движения по известной скорости.
2. Ознакомление с понятием первообразной и её производной.
3. Вычисление первообразной для данной функции.
4. Ознакомление с понятием интеграла, понятием интегрирования.
5. Таблица формул для нахождения первообразных.
6. Изучение правила вычисления первообразных (правила интегрирования).
7. Методы интегрирования.
8. Практическое применение полученных знаний – решение задач.

Литература:

1. [1 учебник раздела «Основные печатные и электронные издания» рабочей программы изучения дисциплины]: Алимов Ш.А. Математика: алгебра и начала математического анализа,геометрия. Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровень./Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др. – Москва: Просвещение, 2024.-463 с., ISBN 978-5-09-112136-0. —Текст : электронный // ЭБС Лань — URL: https://e.lanbook.com/book/408656, с. 291-296 (часть 6), **§ 54,55 (2012-2017,2024 годы издания**, глава **X**).

Примерный расчет времени:

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

Вступительная часть:

Занятие начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (нового материала), закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы, опроса по пройденному материалу.

Основная часть (теоретическая, выполнение практических заданий):

Первый вопрос: <u>Задача о восстановлении закона движения по известной скорости.</u>

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на на с. 291 (часть 6) **§ 54 (2012-2017,2024 годы издания**, глава **X**).

Второй вопрос: <u>Ознакомление с понятием первообразной и её производной.</u>

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на на с. 291 (часть 6) **§ 54 (2012-2017,2024 годы издания**, глава **X**).

Третий вопрос: <u>Вычисление первообразной для данной функции.</u>

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на на с. 291-293 (часть 6) **§ 54 (2012-2017,2024 годы издания**, глава **X**).

Четвёртый вопрос: <u>Ознакомление с понятием интеграла, понятием интегрирования.</u>

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на на с. 294 (часть 6) **§ 55 (2012-2017,2024 годы издания**, глава **X**).

Пятый вопрос: <u>Таблица формул для нахождения первообразных.</u>

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на на с. 294 (часть 6) **§ 55 (2012-2017,2024 годы издания**, глава **X**).

Функция	Первообразная
$x^p,\ p \neq -1$	$\dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\dfrac{1}{x},\ x > 0$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$

Функция	Первообразная
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$(kx+b)^p,\ \ p \neq -1,\ k \neq 0$	$\dfrac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)} + C$
$\dfrac{1}{kx+b},\ \ k \neq 0$	$\dfrac{1}{k}\ln(kx+b) + C$
$e^{kx+b},\ \ k \neq 0$	$\dfrac{1}{k}e^{kx+b} + C$
$\sin(kx+b),\ \ k \neq 0$	$-\dfrac{1}{k}\cos(kx+b) + C$
$\cos(kx+b),\ \ k \neq 0$	$\dfrac{1}{k}\sin(kx+b) + C$

Шестой вопрос: <u>Изучение правила вычисления первообразных (правила интегрирования).</u>

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на на с. 295 (часть 6) **§ 55** (**2012-2017,2024 годы издания**, глава **X**).

Седьмой вопрос: <u>Методы интегрирования.</u>

В математике существуют различные методы интегрирования — способы нахождения первообразной (интеграла) функции. Некоторые из них: метод непосредственного интегрирования, метод подстановки (замены переменных), метод интегрирования по частям и численные методы.

Метод непосредственного интегрирования

Суть: интеграл путём тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) приводится к одному или нескольким интегралам элементарных функций. Тождественные преобразования строятся на применении свойств интеграла, таких как вынесение константы за знак интеграла или разложение интеграла суммы на сумму интегралов. Затем применяется таблица интегралов элементарных функций.

Алгоритм действий:

1. Тождественное преобразование подынтегральной функции.
2. Применение свойств неопределённого интеграла.
3. Использование таблицы интегралов.

Пример: найти первообразную от функции $f(x) = 8x^2 - 5x + 7$. Интеграл от этой функции можно разложить: $\int(8x^2 - 5x + 7)dx = \int 8x^2\,dx - \int 5x\,dx + \int 7dx$. Вынести множители за знак интеграла, после чего решение сводится к использованию табличных значений.

Метод подстановки (замены переменных)

Суть: в интеграл вводится новая переменная интегрирования, в результате чего исходный интеграл сводится к некоторому табличному интегралу или к интегралу, который к нему сводится.

Алгоритм метода:

1. Сделать подстановку, например, $x = \phi(t)$, где функция $\phi(t)$ дифференцируема.
2. Вычислить дифференциал: $dx = d(\phi(t)) = \phi'(t)dt$.
3. Исходный интеграл будет иметь вид: $\int f(x)dx = \int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt$.

Пример: вычислить интеграл $\int\sqrt{(\sin x)} \cdot \cos x dx$. Сделать подстановку: $t = \sin x$, тогда $dt = \cos x dx$. Подставить в исходный интеграл.
Важно: после вычисления интеграла по новой переменной нужно обязательно возвратиться к первоначальной переменной.

Метод интегрирования по частям

Суть: если подынтегральную функцию можно представить в виде произведения двух непрерывных функций (каждая из которых может быть как элементарной функцией, так и композицией), то справедлива формула: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Формула: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, где $dv = v'\,dx$, а $du = u'\,dx$.

Метод работает, если одну часть подынтегрального выражения легко продифференцировать (функцию u), а другую — проинтегрировать (функцию dv).

Пример: вычислить интеграл $\int(x + 1)\,e^2x\,dx$. В исходном интеграле выделить функции u и v, затем выполнить интегрирование по частям.

Численные методы интегрирования

Применяются, когда:

- Сама подынтегральная функция не задана аналитически, например, представлена в виде таблицы значений в узлах некоторой расчётной сетки.
- Аналитическое представление подынтегральной функции известно, но её первообразная не выражается через аналитические функции.
- Вид первообразной настолько сложен, что быстрее вычислить значение интеграла численным методом.

Некоторые численные методы:

- **Метод прямоугольников** — функция разбивается на равные интервалы, и вычисляется сумма площадей прямоугольников, образованных на каждом из них.
- **Метод трапеций** — вместо прямоугольников используется аппроксимация функции трапециями.
- **Метод парабол (метод Симпсона)** — используя три точки отрезка интегрирования, можно заменить подынтегральную функцию параболой. Обычно в качестве таких точек используют концы отрезка и его среднюю точку.
- **Метод Монте-Карло** — применяется для интегрирования сложных функций в многомерных пространствах, основан на случайной выборке точек в заданной области и подсчёте среднего значения функции в этих точках.

Сведения по данному вопросу также представлены в Приложении.

<u>Практическая часть.</u>

Восьмой вопрос: <u>Практическое применение полученных знаний – решение задач.</u>

Задание: (исходные данные):

1. Рассмотреть примеры выполнения практических заданий (решение задач), приведенных в **§ 54, 55** 1-ого учебника раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины «Математика» (с.293-295).

2. Решить задачи, заданные преподавателем (из приведенного ниже списка): №985, 986, 988, 989, 990, 991, 992 Учебника.

Заключительная часть:

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Выдать задание на самоподготовку (домашнее задание).

Задание на самоподготовку (домашнее задание):

1. Детально проработать, материал занятия, размещенный в данном план-конспекте, необходимые сведения учебника, указанного на с. Конспекта занятия.
2. Решить задачи, заданные преподавателем.
3. Подготовиться к опросу по пройденному материалу.