

1 курс

**ПЛАН – КОНСПЕКТ**  
проведения лекционного занятия № 26 по дисциплине  
«Математика»

**Раздел 8. Первообразная функции, ее применение.**

**Тема № 8.5: «Определённый интеграл в жизни»**

**Лекционное занятие № 26**

Подготовил: преподаватель  
В.Н. Борисов

Рязань  
2025

**Лекционное занятие № 26**  
**по Теме № 8.5 «Определённый интеграл в жизни»**

**Цель занятия:** повторить со студентами определённый интеграл – площадь криволинейной трапеции, формулу Ньютона-Лейбница, решение задач на применение определённого интеграла

**Вид занятия:** классно-групповое, комбинированное (по проверке знаний, умений по пройденному материалу, по изучению и первичному закреплению нового материала).

**Метод проведения занятия:** доведение теоретических сведений, выполнение практических заданий.

**Время проведения:** 2 ч

**Основные вопросы:**

1. Геометрический смысл определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
2. Применение определённого интеграла для вычисления площадей.
3. Применение определённого интеграла для вычисления объемов тел.
4. Применение определённого интеграла для вычисления физических величин.
5. Практическое применение полученных знаний – решение задач.

**Литература:**

1. [1 учебник раздела «Основные печатные и электронные издания» рабочей программы изучения дисциплины]: Алимов Ш.А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровень./Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др. – Москва: Просвещение, 2024.-463 с., ISBN 978-5- 09-112136-0. —Текст : электронный // ЭБС Лань — URL: <https://e.lanbook.com/book/408656>, с. 291-296 (часть 6), с. 297-308 (часть 7) §54,56,57,58 (2012-2017,2024 годы издания, глава X);
2. [2 учебник раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины]: Атанасян Л.С. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия.10-11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровень/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – Москва: Просвещение, 2024.-287с., ISBN 978-5-09-112137-7. — Текст : электронный // ЭБС Лань — URL: <https://e.lanbook.com/book/408659>.

**Примерный расчет времени:**

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

### Вступительная часть:

Занятие начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (нового материала), закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы, опроса по пройденному материалу.

### Основная часть (повторение пройденного материала, выполнение практических заданий):

Основные сведения по следующим вопросам:

1. Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла – о вычислении площади криволинейной трапеции, о перемещении точки.
2. Понятие определённого интеграла.
3. Геометрический и физический смысл определённого интеграла.

представлены во 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины, конспектах лекционных занятий №22-25 по Темам 8.1 «Первообразная функции. Правила нахождения первообразных», 8.2 «Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница», 8.3 «Неопределённый и определённый интегралы», 8.4 «Понятие об определённом интеграле как площади криволинейной трапеции».

#### **Первый вопрос: Геометрический смысл определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.**

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с. 297 (часть 6), с.298-300 (часть 7) § 56 (2012-2017,2024 годы издания, глава X).

#### **Второй вопрос: Применение определённого интеграла для вычисления площадей.**

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с.304-308 (часть 7) § 58 (2012-2017,2024 годы издания, глава X).

#### **Третий вопрос: Применение определённого интеграла для вычисления объёмов тел.**

##### **Вычисление объёмов тел с помощью определённого интеграла.**

**формула для вычисления объёма тела с помощью интеграла:**

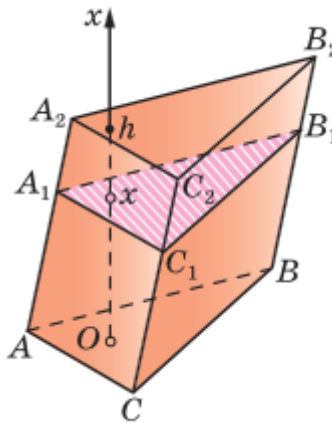
$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

Указанная формула называется основной формулой для вычисления объёмов тел.

Сведения по данному вопросу представлены во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с.125-126 (часть 1), § 3, п.56 (2024,2019 годы издания, глава V), с.165-167, § 3,п.78 (2012-2014 годы издания, глава VII).

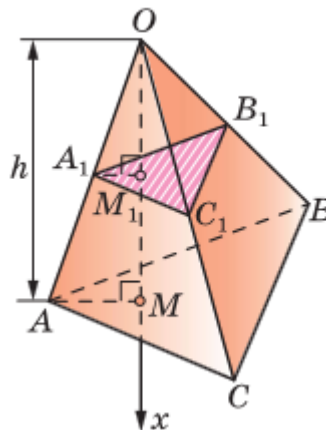
### Объём наклонной призмы.

$$V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h S dx = S \int_0^h dx = S \cdot x \Big|_0^h = S \cdot h.$$



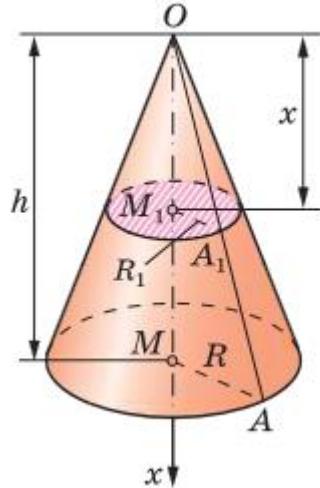
### Объём пирамиды.

$$V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h \frac{S}{h^2} x^2 dx = \frac{S}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{S}{h^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} S \cdot h.$$



Объём конуса.

$$V = \int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2} x^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

Объём шара.

Объём шара радиуса  $R$  равен  $\frac{4}{3} \pi R^3$ .

Обозначим радиус этого круга через  $r$ , а его площадь через  $S(x)$ , где  $x$  — координата точки  $M$ . Выразим  $S(x)$  через  $x$  и  $R$ . Из прямоугольного треугольника  $OMC$  находим

$$r = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Так как  $S(x) = \pi r^2$ , то

$$S(x) = \pi(R^2 - x^2). \quad (1)$$

Заметим, что эта формула верна для любого положения точки  $M$  на диаметре  $AB$ , т. е. для всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $-R \leq x \leq R$ . Применяя основную формулу для вычисления объёмов тел при  $a = -R$ ,  $b = R$ , получаем:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^R \pi(R^2 - x^2) dx = \pi R^2 \int_{-R}^R dx - \pi \int_{-R}^R x^2 dx = \\ &= \pi R^2 x \Big|_{-R}^R - \frac{\pi x^3}{3} \Big|_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

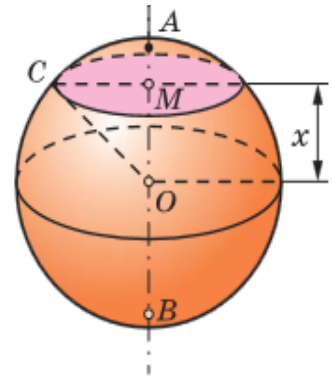


Рис. 149

**Четвёртый вопрос: Применение определённого интеграла для вычисления физических величин.**

**Физический смысл определённого интеграла** заключается в том, что он позволяет посчитать любую величину, изменение которой задано функцией. Например:

– **Путь**, пройденный движущейся по прямой материальной точкой за отрезок времени, равен определённому интегралу скорости.



– **Масса** неоднородного стержня на отрезке равна определённому интегралу от плотности.

Пусть плотность  $\rho(x)$  стержня с **постоянным** сечением  $S$  зависит от расстояния до начала стержня. Тогда масса стержня равна:

$$M = S \int_0^L \rho(x) dx,$$

где  $L$  – длина стержня, а центр масс стержня находится на расстоянии:

$$x_0 = \frac{\int x dm}{M} = \frac{\int_0^L x \rho(x) dx}{\int_0^L \rho(x) dx}.$$





– **Работа переменной силы**, величина которой есть непрерывная функция, действующая на отрезке, равна определённому интегралу от величины силы, взятому по этому отрезку.

### б) Работа силы.

Если переменная сила  $F(x)$  действует по оси  $Ox$ , то работа силы на отрезке  $[x_1; x_2]$  равна

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

– **Количество** вступившего в реакцию вещества за промежуток времени равно определённому интегралу от скорости химического превращения.

### Определение:

- Скорость химической реакции – это изменение количества реагирующего вещества в единицу времени в единице объёма.

$$r = \frac{1}{V} \times \frac{\Delta \nu}{\Delta \tau} = \frac{\Delta C}{\Delta \tau}$$

$r$  – скорость химической реакции,

$V$  – объём м<sup>3</sup>,  $\Delta \nu$  – количество вещества в молях,

$\Delta \tau$  – промежуток времени сек.,

$\Delta C$  – молярная концентрация ( $\Delta \nu / V$ )

### **Скорость химической реакции**

определяется числом соударений (элементарных актов химической реакции), приводящих к химическому превращению в единице объёма в единицу времени

$$v_i = \pm \frac{1}{V} \frac{dn_i}{d\tau} = \pm \frac{dC_i}{d\tau} \left[ \frac{\text{моль}}{\text{л} \cdot \text{с}} \right]$$

Таким образом, определённый интеграл даёт возможность найти суммарный путь, зная закон, по которому изменялась скорость, или рассчитать работу переменной силы.

Сведения по данному вопросу также представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с. 291 (часть б) § 54 (2012-2017,2024 годы издания, глава X).

### **Практическая часть.**

**Пятый вопрос: Практическое применение полученных знаний – решение задач.**

**Задание: (исходные данные):**

1. Рассмотреть примеры выполнения практических заданий (решение задач), приведенных в § 54, 56, 57,58 1-ого учебника раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины «Математика» (с.293-308).
2. Решить задачи, заданные преподавателем (из приведенного ниже списка): №985, 986, 988, 989, 990, 991, 992, 1000, 1001,1004,1006,1014,1016,1018, 1020 Учебника.

**Заключительная часть:**

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Выдать задание на самоподготовку (домашнее задание).

**Задание на самоподготовку (домашнее задание):**

1. Детально проработать, материал занятия, размещенный в данном план-конспекте, необходимые сведения учебников, указанных на с.2 Конспекта занятия.
2. Решить задачи, заданные преподавателем.
3. Подготовиться к опросу по пройденному материалу.