

1 курс

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения практических занятий № 23-24
по дисциплине «Математика»

Раздел 8. Первообразная функции, ее применение.

Тема № 8.5: «Определённый интеграл в жизни»

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань
2025

**Практические занятия № 23-24 «Определённый интеграл при решении прикладных задач»
по Теме № 8.5 «Определённый интеграл в жизни»**

Цель занятий: повторить со студентами определённый интеграл, в том числе нахождение площади криволинейной трапеции, формулу Ньютона-Лейбница, решение задач на применение определённого интеграла

Виды занятий: классно-групповые, комбинированные (по повторению, проверке знаний, умений по пройденному материалу, применению на практике полученных знаний).

Методы проведения занятий: повторное доведение основных теоретических сведений, выполнение практических заданий.

Время проведения: 4 ч (2 занятия по 2 ч)

Основные вопросы:

1. Практическое применение полученных знаний – решение задач.

Литература:

1. [1 учебник раздела «Основные печатные и электронные издания» рабочей программы изучения дисциплины]: Алимов Ш.А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровень./Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др. – Москва: Просвещение, 2024.-463 с., ISBN 978-5- 09-112136-0. —Текст : электронный // ЭБС Лань — URL: <https://e.lanbook.com/book/408656>, с. 291-296 (часть 6), с. 297-315 (часть7) §54,56,57,58,59 (2012-2017,2024 годы издания, глава X);
2. [2 учебник раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины]: Атанасян Л.С. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия.10-11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровень/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – Москва: Просвещение, 2024.-287с., ISBN 978-5-09-112137-7. — Текст : электронный // ЭБС Лань — URL: <https://e.lanbook.com/book/408659>.

Примерный расчет времени (по каждому занятию):

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

Вступительная часть (по каждому занятию):

Занятия начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (повторение пройденного материала), опроса по пройденному материалу, закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы.

Основная часть (повторение пройденного материала, выполнение практических заданий):

Основные сведения по следующим вопросам:

1. Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла – о вычислении площади криволинейной трапеции, о перемещении точки.
2. Ознакомление с понятием первообразной и её производной.
3. Вычисление первообразной для данной функции.
4. Ознакомление с понятием интеграла, понятием интегрирования.
5. Таблица формул для нахождения первообразных.
6. Изучение правила вычисления первообразных (правила интегрирования).
7. Понятие определённого интеграла.
8. Понятие неопределённого интеграла.
9. Геометрический и физический смысл определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
10. Применение определённого интеграла для вычисления площадей.
11. Применение определённого интеграла для вычисления объёмов тел.
12. Применение определённого интеграла для вычисления физических величин.
13. Практическое применение полученных знаний – решение задач.
14. Вычисление объёмов тел с помощью определённого интеграла.
15. Объём наклонной призмы.
16. Объём пирамиды.
17. Объём конуса.
18. Объём шара.
19. Практическое применение полученных знаний – решение задач.

представлены 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины, конспектах лекционных занятий №22-26 по Темам 8.1 «Первообразная функции. Правила нахождения первообразных», 8.2 «Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница», 8.3 «Неопределённый и определённый интегралы», 8.4 «Понятие об определённом интеграле как площади криволинейной трапеции», 8.5 «Определённый интеграл в жизни», во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины, конспектах лекционных занятий №15-17 по Теме 7.13 «Понятие об объёме тела. Отношение объёмов подобных тел», №18-20 по Теме 7.14 «Объёмы и площади поверхностей тел».

Практическая часть.

Первый вопрос: Практическое применение полученных знаний – решение задач.

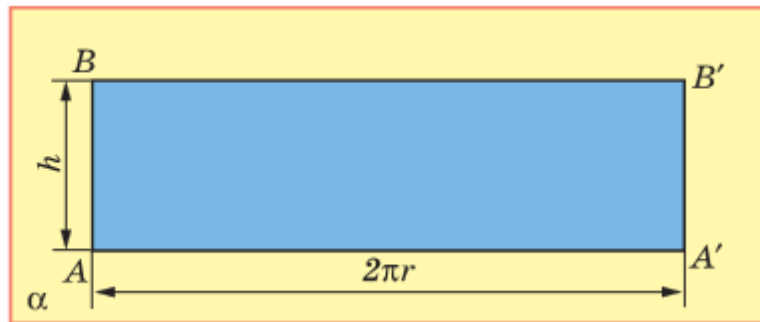
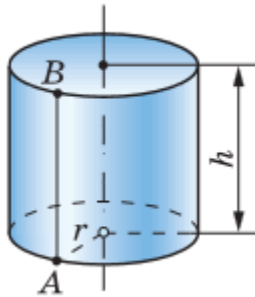
Задача № 1: Площадь боковой поверхности цилиндра с радиусом основания 4 см равна 200 см^2 . Найти объем цилиндра с помощью определенного интеграла.

Дано:

- 1) цилиндр
- 2) радиус основания $r=4 \text{ см}$
- 3) площадь боковой поверхности $S_{\text{б.п.}} = 200 \text{ см}^2$

Найти:

$V_{\text{ц.}} - ?$



$$S_{\text{бок}} = 2\pi r h.$$

$$V = \pi r^2 h.$$

$$V = S \cdot h.$$

Объём цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

$$V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h S dx = S \int_0^h dx = S \cdot x \Big|_0^h = S \cdot h.$$

Решение:

$$1) S_{\text{б.п.}} = 2 \pi r h = 200 \text{ (см}^2\text{)} \quad h = S_{\text{б.п.}} / 2 \pi r = 200 / 2 \pi \cdot 4 \quad h = 200 / 8 \pi = 25 / \pi$$

$$2) S_{\text{осн.}} = \pi r^2$$

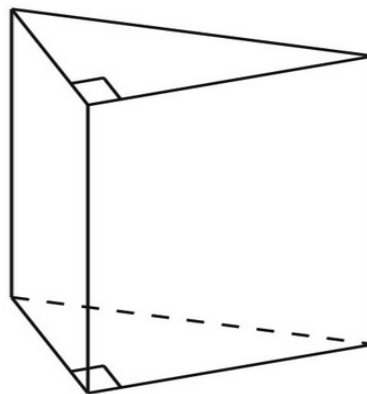
$$3) \quad V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h S dx = S \int_0^h dx = S \cdot x \Big|_0^h = S \cdot h.$$

$$V_{ц.} = S_{осн.} \cdot h = \pi r^2 h = \pi 4^2 \cdot 25 / \pi = 16 \cdot 25 = 400 \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ: 400 см³

Задача № 2:

Основанием прямоугольной треугольной призмы служит треугольник с катетами 6 и 7 единиц, боковое ребро равно 6 единицам. Найдите объем призмы с помощью определенного интеграла.



Решение:

Объем призмы равен $V = S_{осн.} \cdot h$, а так как призма прямая, то ее боковое ребро является и высотой, то есть $h = 6$.

Основанием призмы является прямоугольный треугольник с катетами 6 и 7, тогда площадь основания

$$S_{осн.} = \frac{1}{2} \cdot ab = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 = 21.$$

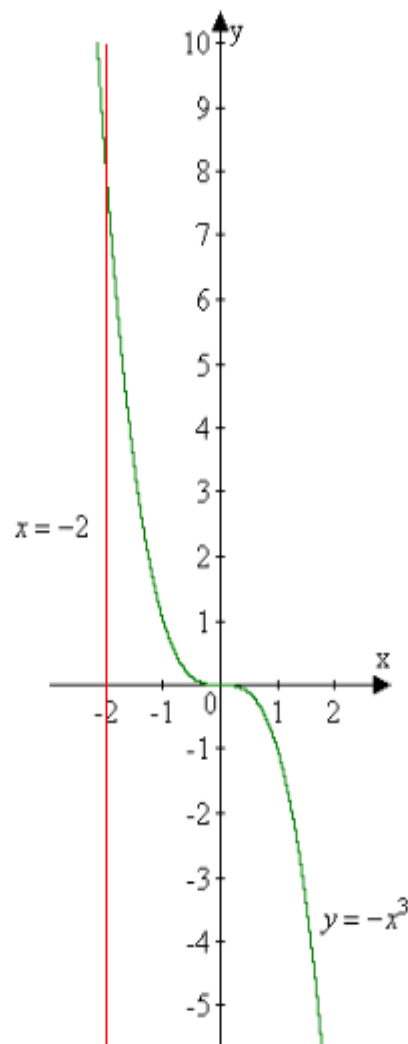
$$V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h S dx = S \int_0^h dx = S \cdot x \Big|_0^h = S \cdot h.$$

Ответ: 126 ед³

Задача № 3:

Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций:
 $y = -x^3$, $y = 0$, $x = -2$ вокруг оси Ox .

Решение



$$V = \pi \cdot \int_{-2}^0 (-x^3)^2 dx = \pi \cdot \int_{-2}^0 x^6 dx = \pi \cdot \frac{x^7}{7} \Big|_{-2}^0 = \pi \cdot \left(0 - \frac{-128}{7} \right) = \frac{128\pi}{7}.$$

Ответ: $\frac{128\pi}{7}$.

Объем тела вращения можно вычислить по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

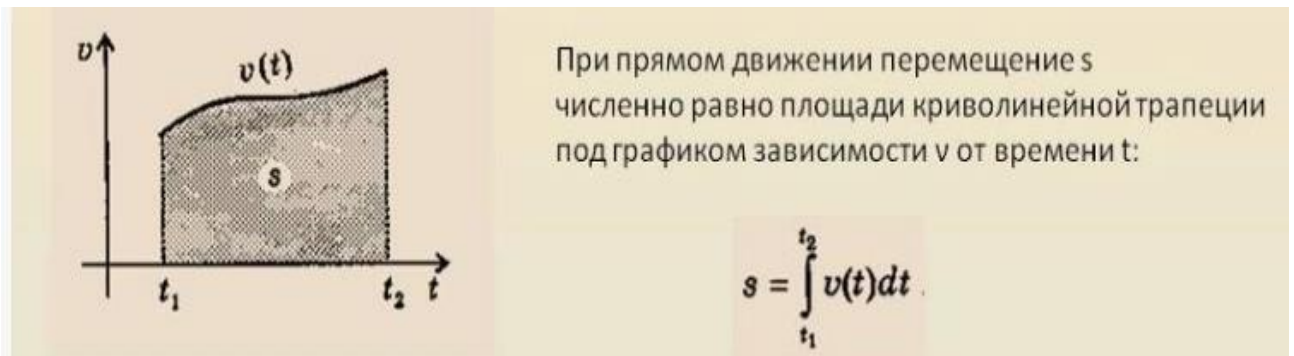
Вычисление площади поверхности тела вращения

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \text{ или, если компактнее: } P = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Применение определённого интеграла для вычисления физических величин.

Физический смысл определённого интеграла заключается в том, что он позволяет посчитать любую величину, изменение которой задано функцией. Например:

– **Путь**, пройденный движущейся по прямой материальной точкой за отрезок времени, равен определённому интегралу скорости.



– **Масса** неоднородного стержня на отрезке равна определённому интегралу от плотности.

Пусть плотность $\rho(x)$ стержня с **постоянным** сечением S зависит от расстояния до начала стержня. Тогда масса стержня равна:

$$M = S \int_0^L \rho(x) dx,$$

где L – длина стержня, а центр масс стержня находится на расстоянии:

$$x_0 = \frac{\int_M x dm}{M} = \frac{\int_0^L x \rho(x) dx}{\int_0^L \rho(x) dx}.$$



– **Работа переменной силы**, величина которой есть непрерывная функция, действующая на отрезке, равна определённому интегралу от величины силы, взятому по этому отрезку.

б) Работа силы.

Если переменная сила $F(x)$ действует по оси Ox , то работа силы на отрезке $[x_1; x_2]$ равна

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

– **Количество** вступившего в реакцию вещества за промежуток времени равно определённому интегралу от скорости химического превращения.

Определение:

- Скорость химической реакции – это изменение количества реагирующего вещества в единицу времени в единице объёма.

$$r = \frac{1}{V} \times \frac{\Delta \nu}{\Delta \tau} = \frac{\Delta C}{\Delta \tau}$$

r – скорость химической реакции,

V – объём м³, $\Delta \nu$ – количество вещества в молях,

$\Delta \tau$ – промежуток времени сек.,

ΔC – молярная концентрация ($\Delta \nu / V$)

Скорость химической реакции

определяется числом соударений (элементарных актов химической реакции), приводящих к химическому превращению в единице объёма в единицу времени

$$v_i = \pm \frac{1}{V} \frac{dn_i}{d\tau} = \pm \frac{dC_i}{d\tau} \left[\frac{\text{моль}}{\text{л} \cdot \text{с}} \right]$$

Таким образом, определённый интеграл даёт возможность найти суммарный путь, зная закон, по которому изменялась скорость, или рассчитать работу переменной силы.

Сведения по данному вопросу также представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с. 291 (часть 6) § 54, с. 309-314 (часть 7) § 59 (2012-2017, 2024 годы издания, глава X).

Задача № 4: Неоднородный стержень длиной 50 см ($\rho_0 = 7,86 \text{ г/см}^3$, $\rho = \rho + 0,25 \rho$) имеет постоянное сечение $S = 4 \text{ см}^2$, расстояние от начала стержня равно 10 см. Найдите массу стержня с помощью определенного интеграла.

Дано:

- 1) Неоднородный стержень ($\rho = \rho + 0,25 \rho$)
- 2) длина стержня $L = 50 \text{ см}$
- 3) сечение $S = 4 \text{ см}^2$
- 4) расстояние от начала стержня $x = 10 \text{ см}$

Найти:

$M_{\text{ст.}}$ – ?

Решение:

Пусть плотность $\rho(x)$ стержня с постоянным сечением S зависит от расстояния до начала стержня. Тогда масса стержня равна:

$$M = S \int_0^L \rho(x) dx,$$



$$M = S \int_0^L \rho(x) dx = 4 \int_0^{50} (\rho + 0,25 \rho) dx = 4 * 1,25 \rho x \Big|_0^{50} =$$

$$= 6 * \rho * 50 - 6 * \rho * 0 = 300 * \rho - 0 = 300 * \rho = 300 * 7,86 = 2358 \text{ г} = 2,358 \text{ кг}$$

Ответ: 2,358 кг

Задание: (исходные данные):

1. Рассмотреть примеры выполнения практических заданий (решение задач), приведенных в § 54, 55, 56, 57, 58, 59 1-ого учебника раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины «Математика» (с.293-313).

2. Решить задачи, заданные преподавателем (из приведенного ниже списка):

№ №985, 986, 988, 989, 990, 991, 992, 1000, 1001, 1004, 1006, 1014, 1016, 1018, 1020, 1025, 1026, 1028, 1031, 1032 Учебника по алгебре.

Заключительная часть (по каждому занятию):

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Выдать задание на самоподготовку (домашнее задание).

Задание на самоподготовку (по каждому занятию):

1. Детально проработать материал занятия, размещенный в данном план-конспекте, необходимые сведения учебников, указанных на с. 2 Конспекта занятия.
2. Решить задачи, заданные преподавателем.
3. Подготовиться к опросу по пройденному материалу.