

1 курс

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения лекционного занятия № 27
по дисциплине «Математика»

Раздел 8. Первообразная функции, ее применение.

Тема № 8.6: «Решение задач. Первообразная функции, ее применение»

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань
2025

**Лекционное занятие № 27 «Первообразная функции. Правила нахождения первообразных. Её применение»
по Теме № 8.6 «Решение задач. Первообразная функции, её применение»**

Цель занятий: повторить со студентами определённый интеграл, в том числе нахождение площади криволинейной трапеции, формулу Ньютона-Лейбница, решение задач на применение определённого интеграла

Вид занятия: классно-групповое, комбинированное (по повторению, проверке знаний, умений по пройденному материалу, применению на практике полученных знаний).

Метод проведения занятия: повторное доведение основных теоретических сведений, выполнение практических заданий.

Время проведения: 2 ч

Основные вопросы:

1. Практическое применение полученных знаний – решение задач.

Литература:

1. [1 учебник раздела «Основные печатные и электронные издания» рабочей программы изучения дисциплины]: Алимов Ш.А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровень./Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др. – Москва: Просвещение, 2024.-463 с., ISBN 978-5- 09-112136-0. —Текст : электронный // ЭБС Лань — URL: <https://e.lanbook.com/book/408656>, с. 291-296 (часть 6), с. 297-315 (часть7) §54,56,57,58,59 (2012-2017,2024 годы издания, глава X);
2. [2 учебник раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины]: Атанасян Л.С. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия.10-11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровень/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – Москва: Просвещение, 2024.-287с., ISBN 978-5-09-112137-7. — Текст : электронный // ЭБС Лань — URL: <https://e.lanbook.com/book/408659>.

Примерный расчет времени (по каждому занятию):

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

Вступительная часть (по каждому занятию):

Занятия начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (повторение пройденного материала), опроса по пройденному материалу, закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы.

Основная часть (повторение пройденного материала, выполнение практических заданий):

Основные сведения по следующим вопросам:

1. Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла – о вычислении площади криволинейной трапеции, о перемещении точки.
2. Ознакомление с понятием первообразной и её производной.
3. Вычисление первообразной для данной функции.
4. Ознакомление с понятием интеграла, понятием интегрирования.
5. Таблица формул для нахождения первообразных.
6. Изучение правила вычисления первообразных (правила интегрирования).
7. Понятие определённого интеграла.
8. Понятие неопределённого интеграла.
9. Геометрический и физический смысл определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
10. Применение определённого интеграла для вычисления площадей.
11. Применение определённого интеграла для вычисления объёмов тел.
12. Применение определённого интеграла для вычисления физических величин.
13. Практическое применение полученных знаний – решение задач.
14. Вычисление объёмов тел с помощью определённого интеграла.
15. Объём наклонной призмы.
16. Объём пирамиды.
17. Объём конуса.
18. Объём шара.
19. Практическое применение полученных знаний – решение задач.

представлены 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины, конспектах лекционных занятий №22-26 по Темам 8.1 «Первообразная функции. Правила нахождения первообразных», 8.2 «Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница», 8.3 «Неопределённый и определённый интегралы», 8.4 «Понятие об определённом интеграле как площади криволинейной трапеции», 8.5 «Определённый интеграл в жизни», во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины, конспектах лекционных занятий №15-17 по Теме 7.13 «Понятие об объёме тела. Отношение объёмов подобных тел», №18-20 по Теме 7.14 «Объёмы и площади поверхностей тел».

Теорема. Если $F(x)$ — первообразная функция для непрерывной функции $y = f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$, то имеет место формула:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Это формула Ньютона–Лейбница — основная формула интегрального исчисления, устанавливающая связь между определенным и неопределенным интегралом. Она читается так:

|| *Определенный интеграл* — это разность значений любой первообразной функции для $f(x)$ при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Можно отметить разницу между определенным и неопределенным интегралами: определенный интеграл — это число, а неопределенный интеграл — это функция.

Основные свойства определенного интеграла

1. При перестановке пределов изменяется знак интеграла:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

2. Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

3. Отрезок интегрирования можно разбивать на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (\text{свойство аддитивности}).$$

4. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их определенных интегралов.

5. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

6. Если функция $f(x) \geq 0$ всегда на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

7. Если $f(x) \leq g(x)$ всюду на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Геометрический смысл определенного интеграла: он численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$; $x = b$; $y = 0$ и частью графика функции $y = f(x)$, взятой со знаком плюс, если функция положительна, и со знаком минус, если функция отрицательна (рис. 2.19).

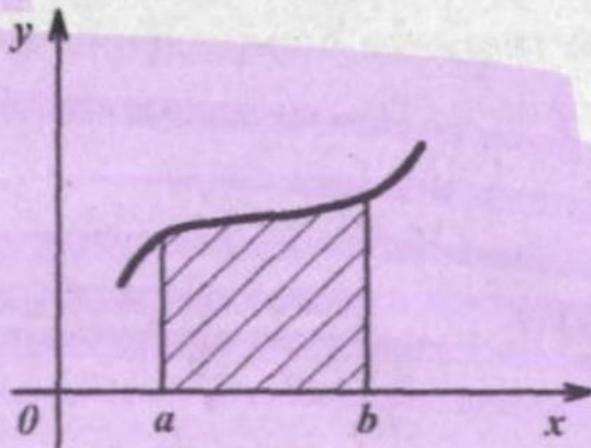


Рис. 2.19. Геометрическая интерпретация определенного интеграла

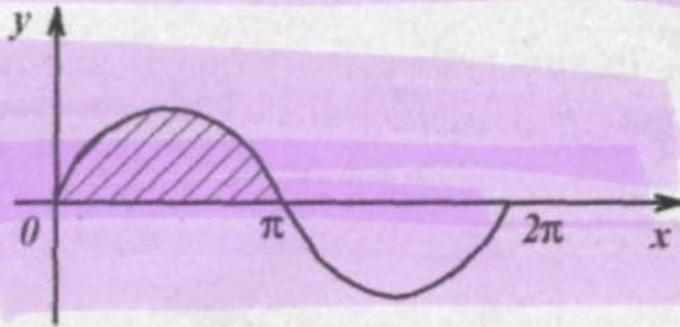
Применение определенного интеграла для решения прикладных задач

► Площадь плоской фигуры

Площадь криволинейной трапеции

◆ Пример 2.102

Определить площадь полуволны синусоиды.

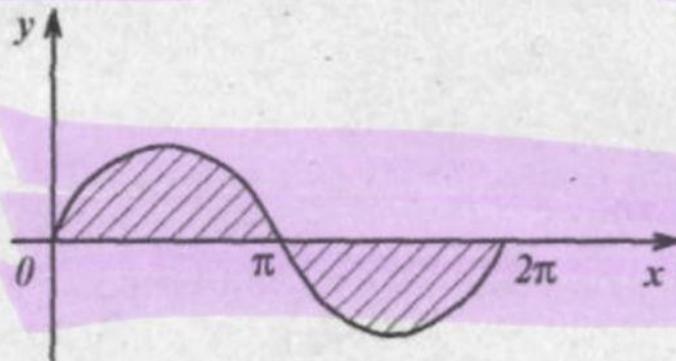


Решение:

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2 \text{ (кв. ед.)}$$

◆ Пример 2.103

Определить площадь полной синусоиды.



Решение:

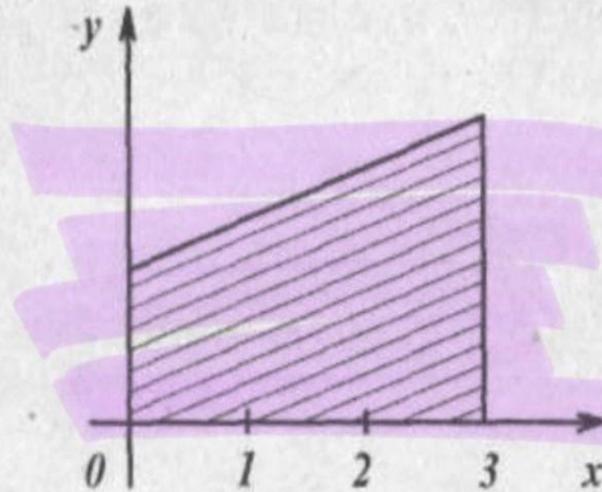
$$S = \int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = -(+1 - 1) = 0.$$

Ответ: $S = 0$.

◆ Пример 2.105

Определить площадь фигуры, образованной функцией $y = 2x + 5$ и осью при изменении x от 0 до 3.

Решение:



$$S = \int_0^3 (2x + 5) dx = 2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 + 5x \Big|_0^3 = x^2 \Big|_0^3 + 5x \Big|_0^3 = 9 + 15 = 24 \text{ (кв. ед.)}$$

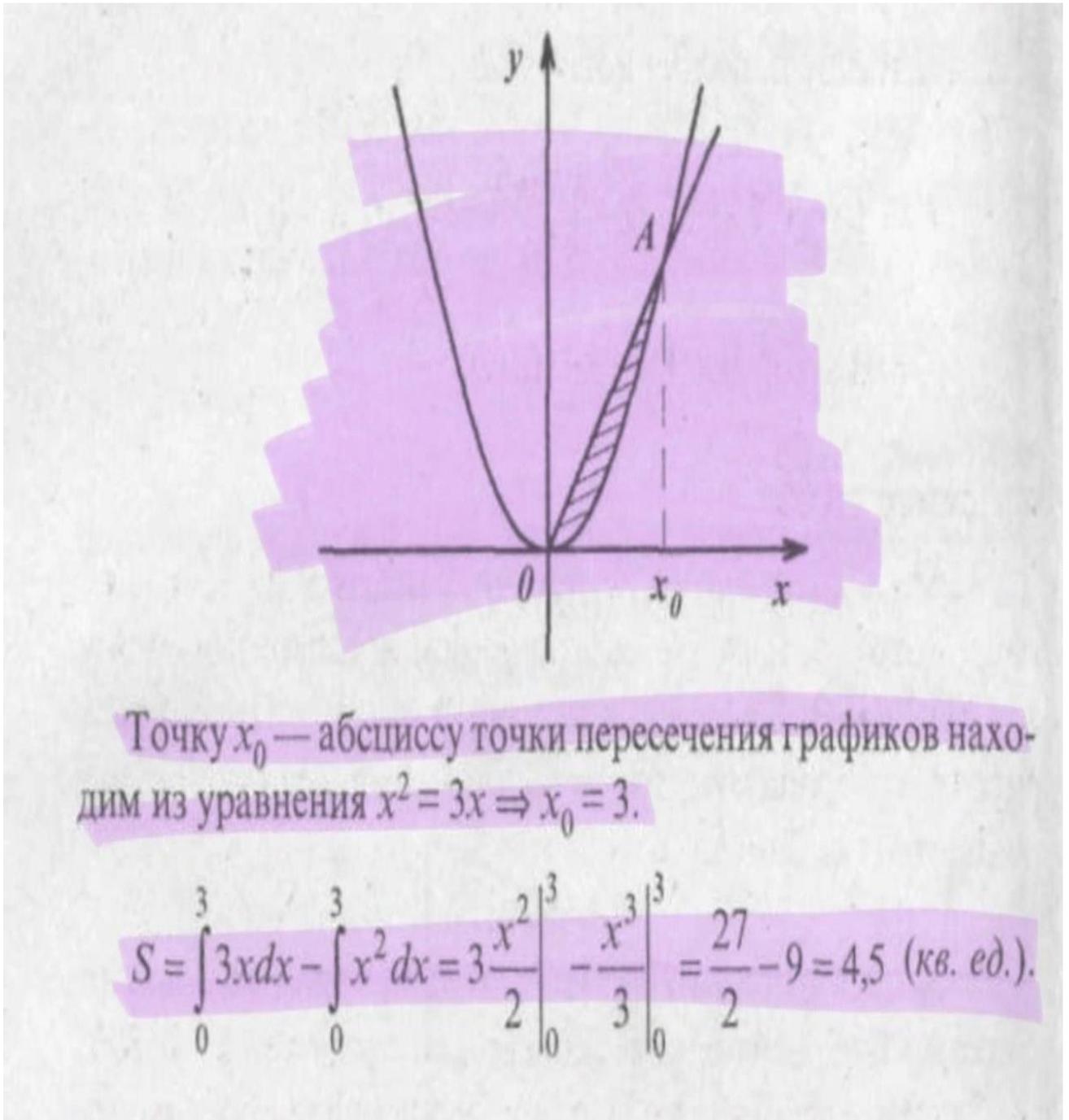
◆ Пример 2.106

Вычислить площадь между линиями $y_1 = x^2$ и $y_2 = 3x$.

Решение:

Искомая площадь — это разность между площадью прямоугольного треугольника OAx_0 и площадью криволинейного треугольника, ограниченного сверху участком параболы.

$$S = \int_0^{x_0} 3x dx - \int_0^{x_0} x^2 dx$$



Практическая часть.

Первый вопрос: Практическое применение полученных знаний – решение задач.

Задача № 1: Неоднородный стержень длиной 50 см ($\rho_0 = 7,86 \text{ г/см}^3$, $\rho = \rho_0 + 0,25 \rho$) имеет постоянное сечение $S = 4 \text{ см}^2$, расстояние от начала стержня равно 10 см. Найдите массу стержня с помощью определенного интеграла.

Дано:

- 1) Неоднородный стержень ($\rho = \rho + 0,25 \rho$)
- 2) длина стержня $L = 50$ см
- 3) сечение $S = 4$ см
- 4) расстояние от начала стержня $x = 10$ см

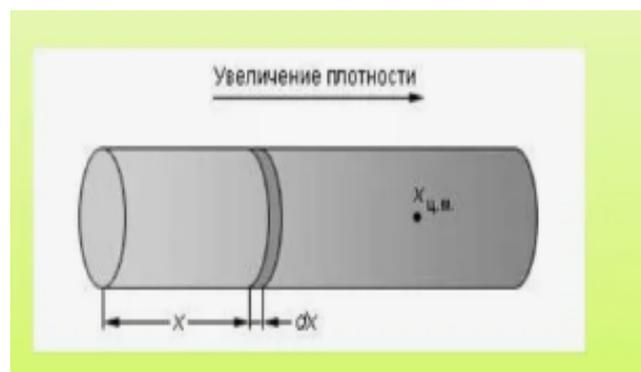
Найти:

$M_{ст.} - ?$

Решение:

Пусть плотность $\rho(x)$ стержня с постоянным сечением S зависит от расстояния до начала стержня. Тогда масса стержня равна:

$$M = S \int_0^L \rho(x) dx,$$



$$M = S \int_0^L \rho(x) dx = 4 \int_0^{50} (\rho + 0,25 \rho) dx = 4 * 1,25 \rho x \Big|_0^{50} =$$

$$= 6 * \rho * 50 - 6 * \rho * 0 = 300 * \rho - 0 = 300 * \rho = 300 * 7,86 \\ = 2358 \text{ г} = 2,358 \text{ кг}$$

Ответ: 2,358 кг

Применение интеграла к решению практических задач.

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с. 30-313 (часть 7) § 59 (2012-2017, 2024 годы издания, глава X).

Задание:

1. Рассмотреть примеры выполнения практических заданий (решение задач), приведенных в § 54, 55, 56, 57, 58, 59 1-ого учебника раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины «Математика» (с.293-313).

2. Решить задачи, заданные преподавателем (из приведенного ниже списка):

№ №985, 986, 988, 989, 990, 991, 992, 1000, 1001, 1004, 1006, 1014, 1016, 1018, 1020, 1025, 1026, 1027, 1028, 1031, 1032 Учебника по алгебре.

Заключительная часть:

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Выдать задание на самоподготовку (домашнее задание).

Задание на самоподготовку:

1. Детально проработать материал занятия, размещенный в данном план-конспекте, необходимые сведения учебников, указанных на с. 2 Конспекта занятия.
2. Решить задачи, заданные преподавателем.
3. Подготовиться к опросу по пройденному материалу.