492 Доказать тождество:

1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$;

2) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta - 1}$;

3) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)$;

4) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta} = \operatorname{ctg}\beta - \operatorname{tg}\alpha$;

5) $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$;

6) $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$.

493 Вычислить:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}29^\circ + \operatorname{tg}31^\circ}{1 - \operatorname{tg}29^\circ\operatorname{tg}31^\circ}$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{16} - \operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{16}}{1 + \operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{16}\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{16}}$;

3) $\dfrac{1 + \operatorname{tg}10^\circ\operatorname{tg}55^\circ}{\operatorname{tg}55^\circ - \operatorname{tg}10^\circ}$;

4) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}13^\circ\operatorname{tg}17^\circ}{\operatorname{tg}17^\circ + \operatorname{tg}13^\circ}$.

494 Вычислить:

1) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{3}{4}$ и $\operatorname{tg}\beta = 2{,}4$;

2) $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{4}{3}$ и $\operatorname{ctg}\beta = -1$.

495 Упростить выражение $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)}$.

496 Упростить выражение:

1) $\sin\alpha\cos2\alpha + \sin2\alpha\cos\alpha$;

2) $\sin5\beta\cos3\beta - \sin3\beta\cos5\beta$.

497 Решить уравнение:

1) $\cos6x\cos5x + \sin6x\sin5x = -1$;

2) $\sin3x\cos5x - \sin5x\cos3x = -1$;

3) $\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right) - \cos x = 1$;

4) $\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right) + \sin\dfrac{x}{2} = 1$.

§ 29 Синус, косинус и тангенс двойного угла

Выведем формулы синуса и косинуса двойного угла, используя формулы сложения.

1. $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Итак,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (1)$$

Задача 1 Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}6$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

▶ По формуле (1) находим
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot(-0{,}6)\cdot\cos\alpha = -1{,}2\cos\alpha$.
Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$, и поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}36} = -0{,}8.$$

Следовательно, $\sin 2\alpha = -1{,}2\cdot(-0{,}8) = 0{,}96$. ◁

2. $\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. Итак,

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \qquad (2)$$

Задача 2 Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}3$.

▶ Используя формулу (2) и основное тригонометрическое тождество, получаем
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot(0{,}3)^2 - 1 = -0{,}82$. ◁

Задача 3 Упростить выражение $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$.

▶ $$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha.$$ ◁

Задача 4 Вычислить $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$.

▶ Полагая в формуле $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$ (см. § 28) $\beta = \alpha$, получаем

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \qquad (3)$$

Если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, то по формуле (3) находим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}. \quad \triangleleft$$

Задача 5* Вычислить $\sin 3\alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{4}$.

▶ $\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha \cos 2\alpha + \cos\alpha \sin 2\alpha =$
$= \sin\alpha (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \cos\alpha\, 2 \sin\alpha \cos\alpha =$
$= \sin\alpha \cos^2\alpha - \sin^3\alpha + 2 \sin\alpha \cos^2\alpha =$
$= 3 \sin\alpha \cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3 \sin\alpha (1 - \sin^2\alpha) -$
$- \sin^3\alpha = 3 \sin\alpha - 4 \sin^3\alpha = \sin\alpha (3 - 4 \sin^2\alpha)$.
При $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ получаем $\sin 3\alpha = \frac{1}{4}\left(3 - \frac{1}{4}\right) = \frac{11}{16}$. ◁

Упражнения

Выразить синус, косинус или тангенс, используя формулы двойного угла **(498—499)**.

498 1) $\sin 48°$; 2) $\cos 164°$; 3) $\operatorname{tg} 92°$; 4) $\sin \frac{4\pi}{3}$; 5) $\cos \frac{5\pi}{3}$.

499 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;
4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$; 5) $\sin\alpha$; 6) $\cos\alpha$.

Вычислить, не используя калькулятор **(500—502)**.

500 1) $2 \sin 15° \cdot \cos 15°$; 2) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$;
3) $\frac{2 \operatorname{tg} 15°}{1 - \operatorname{tg}^2 15°}$; 4) $(\cos 75° - \sin 75°)^2$.

501 1) $2 \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$; 2) $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$;
3) $\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8}\right)^2$.

502 1) $2\sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ$; 2) $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$;

3) $\dfrac{6\ \mathrm{tg}\, 75^\circ}{1-\mathrm{tg}^2\, 75^\circ}$; 4) $\dfrac{\mathrm{tg}^2\, 22^\circ 30' - 1}{\mathrm{tg}\, 22^\circ 30'}$.

503 Вычислить $\sin 2\alpha$, если:

1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

504 Вычислить $\cos 2\alpha$, если:

1) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; 2) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$.

505 Вычислить $\mathrm{tg}\, 2\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}5$.

Упростить выражение (**506—507**).

506 1) $2\cos 40^\circ \cdot \cos 50^\circ$; 2) $2\sin 25^\circ \cdot \sin 65^\circ$;

3) $\sin 2\alpha + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$; 4) $\cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha$.

507 1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}$; 2) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$.

508 Доказать тождество:

1) $\sin 2\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1$;

2) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$;

3) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$; 4) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 1$.

509 Вычислить $\sin 2\alpha$, если:

1) $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha - \cos\alpha = -\frac{1}{3}$.

510 Доказать тождество:

1) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha} = \mathrm{ctg}\,\alpha - 1$; 2) $\dfrac{\sin 2\alpha - 2\cos\alpha}{\sin\alpha - \sin^2\alpha} = -2\,\mathrm{ctg}\,\alpha$;

3) $\mathrm{tg}\,\alpha\,(1+\cos 2\alpha) = \sin 2\alpha$; 4) $\dfrac{1-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$;

5) $\dfrac{(1-2\cos^2\alpha)(2\sin^2\alpha - 1)}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \mathrm{ctg}^2\, 2\alpha$;

6) $1 - 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right) = \sin\alpha$; 7) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha$.

511 Доказать тождество

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha\,(1+\mathrm{ctg}\,\alpha)} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\,(1+\mathrm{tg}\,\alpha)} = \frac{2\sqrt{2}\,\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha}.$$

512 Решить уравнение:

1) $\sin 2x - 2\cos x = 0$; 2) $\cos 2x + \sin^2 x = 1$;

3) $4\cos x = \sin 2x$; 4) $\sin^2 x = -\cos 2x$;

5) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = 0$; 6) $\cos^2\frac{x}{2} = \sin^2\frac{x}{2}$.

§ 30* Синус, косинус и тангенс половинного угла

По известным значениям $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ можно найти значения $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если известно, в какой четверти лежит угол α.

Из формулы $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ при $x = \frac{\alpha}{2}$ получаем

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Запишем основное тригонометрическое тождество в виде

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Складывая равенства (1) и (2) и вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \qquad (3)$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) можно записать так:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}, \qquad (5)$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}. \qquad (6)$$

Формулы (5) и (6) называют формулами синуса и косинуса половинного угла. Иногда их называют также формулами понижения степени.

Если известен $\cos\alpha$, то из формул (5) и (6) можно найти $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$ и $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$. Знаки $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ могут быть определены, если известно, в какой четверти лежит угол $\frac{\alpha}{2}$.

Задача 1 Вычислить $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -0{,}02$ и $0 < \alpha < \pi$.

▶ По формуле (5) $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{1-0{,}02}{2} = 0{,}49$.

Так как $0 < \alpha < \pi$, то $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, и поэтому $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$. Следовательно, $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7$. ◁

Разделив равенство (6) на равенство (5), получим формулу тангенса половинного угла

$$\mathbf{tg}^2\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (7)$$

Задача 2 Вычислить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = 0{,}8$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

▶ По формуле (7) имеем

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-0{,}8}{1+0{,}8} = \frac{0{,}2}{1{,}8} = \frac{1}{9}.$$

По условию $\pi < \alpha < 2\pi$, поэтому $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < 0$.

Следовательно, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1}{9}} = -\frac{1}{3}$. ◁

Задача 3 Упростить выражение $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1+\cos\alpha}{2}$.

▶ $$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos^2\frac{\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$ ◁

Задача 4 Решить уравнение $1 + \cos 2x = 2\cos x$.

▶ Так как $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$, то данное уравнение примет вид $2\cos^2 x = 2\cos x$, откуда

$$\cos x\,(\cos x - 1) = 0.$$

1) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Итак, исходное уравнение имеет две серии корней $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, и $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. В ответе можно записывать обе серии с одной буквой (k или n).

Ответ $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. ◁

Задача 5 Выразить $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

▶ 1) $\sin\alpha = \sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} =$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Итак,

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (8)$$

2) $\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} =$

$$= \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Итак,

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (9)$$

3) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$

Итак,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (10)$$

Эту формулу можно также получить почленным делением равенств (8) и (9). ◁

Итак, по формулам (8) — (10) можно находить синус, косинус и тангенс угла α, зная тангенс угла $\frac{\alpha}{2}$.

Упражнения

513 Выразить квадрат синуса (косинуса) заданного угла через косинус угла, в два раза большего:

1) $\sin^2 15°$; 2) $\cos^2\frac{1}{4}$; 3) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 4) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

514 Найти числовое значение выражения:

1) $2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$; 2) $1-2\sin^2\frac{\pi}{12}$;

3) $\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin^2 15°$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cos^2 15°$.

515 Пусть $\cos\alpha=0{,}6$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Вычислить:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

516 Пусть $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Вычислить:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

517 Вычислить:

1) $\sin 15°$; 2) $\cos 15°$; 3) $\operatorname{tg} 22°30'$; 4) $\operatorname{ctg} 22°30'$.

518 Упростить выражение:

1) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; 2) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; 3) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$;

4) $\frac{1+\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}$; 5) $\frac{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$;

6) $(1-\cos 2\alpha)\operatorname{ctg}\alpha$.

Доказать тождество **(519—520)**.

519 1) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=1+\sin\alpha$; 2) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=1-\sin\alpha$;

3) $\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$; 4) $\frac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$.

520 1) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$; 2) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

3) $\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$; 4) $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

521 Доказать, что если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=2\sin\frac{\alpha}{2}$.

522 Упростить выражение $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 4\alpha-\operatorname{tg} 2\alpha}$.

523 Решить уравнение:

1) $1-\cos x=2\sin\frac{x}{2}$; 2) $1+\cos x=2\cos\frac{x}{2}$;

3) $1+\cos\frac{x}{2}=2\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{3\pi}{2}\right)$; 4) $1+\cos 8x=2\cos 4x$;

5) $2\sin^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x=1$; 6) $2\cos^2 x-\frac{1}{2}\sin 4x=1$.

§ 31 Формулы приведения

Таблицы значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса составляются для углов от 0° до 90° (или от 0 до $\frac{\pi}{2}$). Это объясняется тем, что их значения для остальных углов сводятся к значениям для острых углов.

Задача Вычислить $\sin 870°$ и $\cos 870°$.

▶ Заметим, что $870° = 2 \cdot 360° + 150°$. Следовательно, при повороте точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на 870° точка совершит два полных оборота и ещё повернётся на угол 150°, т. е. получится та же самая точка M, что и при повороте на 150° (рис. 66). Поэтому $\sin 870° = \sin 150°$, $\cos 870° = \cos 150°$.

Построим точку M_1, симметричную точке M относительно оси OY (рис. 67). Ординаты точек M и M_1 одинаковы, а абсциссы различаются только знаком. Поэтому $\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ $\sin 870° = \frac{1}{2}$, $\cos 870° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. ◁

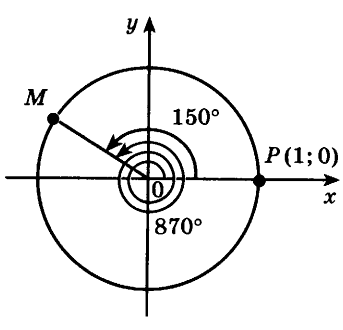


Рис. 66

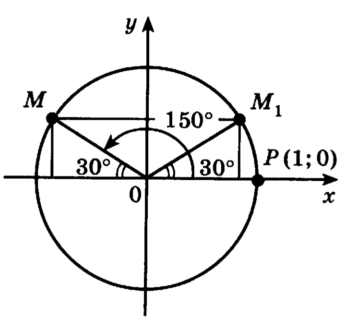


Рис. 67

При решении задачи 1 использовались равенства

$$\begin{aligned}\sin(2\cdot 360^\circ + 150^\circ) &= \sin 150^\circ,\\ \cos(2\cdot 360^\circ + 150^\circ) &= \cos 150^\circ,\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ - 30^\circ) &= \sin 30^\circ,\\ \cos(180^\circ - 30^\circ) &= -\cos 30^\circ.\end{aligned} \tag{2}$$

Равенства (1) верны, так как при повороте точки $P\,(1;\,0)$ на угол $\alpha + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, получается та же самая точка, что и при повороте на угол α. Следовательно, верны формулы

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + 2\pi k) &= \sin \alpha,\\ \cos(\alpha + 2\pi k) &= \cos \alpha,\ k \in \mathbf{Z}.\end{aligned} \tag{3}$$

Равенства (2) являются частными случаями формул

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha,\quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha. \tag{4}$$

Докажем формулу $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$.

● Применяя формулу сложения для синуса, получаем $\sin(\pi - \alpha) = \sin \pi \cos \alpha - \cos \pi \sin \alpha = 0 \cdot \cos \alpha - (-1) \cdot \sin \alpha = \sin \alpha$. ○

Аналогично доказывается и вторая из формул (4), которые называются ***формулами приведения***. Вообще, формулами приведения для синуса называют следующие шесть формул:

$$\begin{aligned}&\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, && \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha,\\ &\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, && \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha,\\ &\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha, && \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha.\end{aligned} \tag{5}$$

Следующие шесть формул называют формулами приведения для косинуса:

$$\begin{aligned}&\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, && \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha,\\ &\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha, && \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha,\\ &\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha, && \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha.\end{aligned} \tag{6}$$

Формулы (5) и (6) справедливы при любых значениях α.

Задача 2 Вычислить $\sin 930^\circ$.

▶ Используя первую из формул (3), получаем

$$\sin 930^\circ = \sin(3 \cdot 360^\circ - 150^\circ) = \sin(-150^\circ).$$

По формуле $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ получим $\sin(-150°) = -\sin 150°$. По формуле (4) находим

$$-\sin 150° = -\sin(180° - 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}.$$

Ответ $\sin 930° = -\frac{1}{2}$. ◁

Задача 3 Вычислить $\cos\frac{15\pi}{4}$.

▶ $\cos\frac{15\pi}{4} = \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ◁

Покажем теперь, как можно свести вычисление тангенса любого угла к вычислению тангенса острого угла.

Заметим, что из формул (3) и определения тангенса следует равенство $\operatorname{tg}(\alpha + 2\pi k) = \operatorname{tg}\alpha$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Используя это равенство и формулы (4), получаем

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}(\alpha + \pi - 2\pi) = \operatorname{tg}(\alpha - \pi) =$$
$$= -\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = -\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Следовательно, справедлива формула

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg}\alpha, \quad k \in \boldsymbol{Z}. \tag{7}$$

Аналогично доказывается формула

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{ctg}\alpha, \quad k \in \boldsymbol{Z}. \tag{8}$$

Следующие четыре формулы называют формулами приведения для тангенса и котангенса:

$$\begin{aligned} &\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha, \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha, \\ &\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha. \end{aligned} \tag{9}$$

Формулы (9) справедливы при всех допустимых значениях α.

Задача 4 Вычислить: 1) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{3}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{4}$.

▶ 1) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

2) $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. ◁

Формулы приведения для синуса и косинуса доказываются с помощью формул сложения аналогично тому, как доказана первая из формул (4). Формулы (9) можно получить из формул (5) и (6), зная, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Формулы приведения запоминать необязательно. Для того чтобы записать любую из них, можно руководствоваться следующими правилами:

1) В правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть при условии $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2) Если в левой части угол равен $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус заменяется на косинус, косинус — на синус, тангенс — на котангенс, котангенс — на тангенс. Если угол равен $\pi \pm \alpha$, то замены не происходит.

Например, покажем, как с помощью этих правил можно получить формулу приведения для $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. По первому правилу в правой части формулы нужно поставить знак «–», так как если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + \alpha < \pi$, а косинус во второй четверти отрицателен. По второму правилу косинус нужно заменить на синус, следовательно, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$.

Итак, формулы (3), (7) и формулы приведения позволяют свести вычисление синуса, косинуса, тангенса и котангенса любого угла к вычислению их значений для острого угла.

Упражнения

524 Найти значение острого угла α, если:

1) $\cos 75° = \cos(90° - \alpha)$; 2) $\sin 150° = \sin(90° + \alpha)$;
3) $\sin 150° = \sin(180° - \alpha)$; 4) $\cos 310° = \cos(270° + \alpha)$;
5) $\sin \frac{5}{4}\pi = \sin(\pi + \alpha)$; 6) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{5} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;
7) $\cos \frac{7\pi}{4} = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$; 8) $\operatorname{ctg} \frac{11}{6}\pi = \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)$.

Вычислить с помощью формулы приведения **(525—526)**.

525 1) $\cos 150°$; 2) $\sin 135°$; 3) $\operatorname{ctg} 135°$; 4) $\cos 120°$;
5) $\cos 225°$; 6) $\sin 210°$; 7) $\operatorname{ctg} 240°$; 8) $\sin 315°$.

526 1) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$; 2) $\sin \frac{7\pi}{6}$; 3) $\cos \frac{5\pi}{3}$; 4) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{3}$;
5) $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$; 6) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; 7) $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$.

Упростить выражение (527—528).

527 1) $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{tg}(\pi+\alpha)+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$.

528 1) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin^2(\pi+\alpha)+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

529 Вычислить:

1) $\cos 750^\circ$; 2) $\sin 1140^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 405^\circ$; 4) $\cos 840^\circ$;

5) $\sin\dfrac{47\pi}{6}$; 6) $\operatorname{tg}\dfrac{25\pi}{4}$; 7) $\operatorname{ctg}\dfrac{27\pi}{4}$; 8) $\cos\dfrac{21\pi}{4}$.

530 Найти значение выражения:

1) $\cos 630^\circ-\sin 1470^\circ-\operatorname{ctg} 1125^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 1800^\circ-\sin 495^\circ+\cos 945^\circ$;

3) $3\cos 3660^\circ+\sin(-1560^\circ)+\cos(-450^\circ)$;

4) $\cos 4455^\circ-\cos(-945^\circ)+\operatorname{tg} 1035^\circ-\operatorname{ctg}(-1500^\circ)$.

531 Вычислить:

1) $\cos\dfrac{23\pi}{4}-\sin\dfrac{15\pi}{4}-\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{11\pi}{2}\right)$;

2) $\sin\dfrac{25\pi}{3}-\cos\left(-\dfrac{17\pi}{2}\right)-\operatorname{tg}\dfrac{10\pi}{3}$;

3) $\sin(-7\pi)-2\cos\dfrac{31\pi}{3}-\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{4}$;

4) $\cos(-9\pi)+2\sin\left(-\dfrac{49\pi}{6}\right)-\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{21\pi}{4}\right)$.

Доказать тождество (532—533).

532 1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=0$;

2) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=0$;

3) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)}=-\sin\alpha$.

533 1) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\alpha\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$;

2) $\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)=-\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)$;

3) $\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)$.

534 Доказать, что синус суммы двух внутренних углов треугольника равен синусу его третьего угла.

535 Решить уравнение:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$; 2) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=1$;

3) $\cos(x-\pi)=0$; 4) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=1$;

5) $\sin(2x+3\pi)\sin\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)-\sin 3x\cos 2x=-1$;

6) $\sin\left(5x-\frac{3\pi}{2}\right)\cos(2x+4\pi)-\sin(5x+\pi)\sin 2x=0$.

536 Доказать, что вычисление значений синуса, косинуса и тангенса любого угла можно свести к вычислению их значений для угла, заключённого в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

§ 32 Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов

Задача 1 Упростить выражение

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}.$$

▶ Используя формулу сложения и формулу синуса двойного угла, получаем

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12} = \left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}+\right.$$

$$\left.+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\sin\alpha. \ \triangleleft$$

Эту задачу можно решить проще, если использовать формулу суммы синусов:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (1)$$

С помощью этой формулы получаем

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12} =$$
$$= 2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Докажем теперь справедливость формулы (1).

● Обозначим $\frac{\alpha+\beta}{2} = x$, $\frac{\alpha-\beta}{2} = y$. Тогда $x + y = \alpha$, $x - y = \beta$, и поэтому $\sin\alpha + \sin\beta = \sin(x+y) + \sin(x-y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y + \sin x\cos y - \cos x\sin y = 2\sin x\cos y = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. ○

Наряду с формулой (1) используется формула разности синусов, а также формулы суммы и разности косинусов:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (3)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) доказываются так же, как и формула (1); формула (2) получается из формулы (1) заменой β на $-\beta$. (Докажите самостоятельно.)

Задача 2 Вычислить $\sin 75° + \cos 75°$.

▶ $\sin 75° + \cos 75° = \sin 75° + \sin 15° =$
$= 2\sin\frac{75°+15°}{2}\cos\frac{75°-15°}{2} = 2\sin 45°\cos 30° =$
$= 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. ◁

Задача 3 Преобразовать в произведение $2\sin\alpha + \sqrt{3}$.

▶ $2\sin\alpha + \sqrt{3} = 2\left(\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\sin\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\right) =$
$= 4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$. ◁

Задача 4* Доказать, что наименьшее значение выражения $\sin\alpha + \cos\alpha$ равно $-\sqrt{2}$, а наибольшее равно $\sqrt{2}$.

▶ Преобразуем данное выражение в произведение:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$
$$= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

Так как наименьшее значение косинуса равно -1, а наибольшее равно 1, то наименьшее значение данного выражения равно $\sqrt{2}\cdot(-1) = -\sqrt{2}$, а наибольшее равно $\sqrt{2}\cdot 1 = \sqrt{2}$. ◁

В преобразованиях тригонометрических выражений, а также при решении некоторых уравнений используются формулы преобразования произведения в сумму или разность:

$$\mathbf{\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)),}$$
$$\mathbf{\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)),}$$
$$\mathbf{\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)).}$$

Задача 5* Доказать тождество

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)).$$

▶ Приведём правую часть равенства с помощью формулы сложения к виду левой:

$$\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)) = \frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\beta +$$
$$+ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sin\alpha\cos\beta = \sin\alpha\cos\beta. \ ◁$$

Упражнения

537 Упростить выражение:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$;

3) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$; 4) $\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

538 Вычислить:

1) $\cos 105^\circ + \cos 75^\circ$; 2) $\sin 105^\circ - \sin 75^\circ$;

3) $\cos\frac{11\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12}$; 4) $\cos\frac{11\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12}$;

5) $\sin\frac{7\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}$; 6) $\sin 105^\circ + \sin 165^\circ$.

539 Преобразовать в произведение:

1) $1 + 2\sin\alpha$; 2) $1 - 2\sin\alpha$; 3) $1 + 2\cos\alpha$; 4) $1 + \sin\alpha$.

540 Доказать тождество:

1) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$; 2) $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

541 Упростить выражение:

1) $\dfrac{2(\cos\alpha + \cos 3\alpha)}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}$; 2) $\dfrac{1 + \sin\alpha - \cos 2\alpha - \sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1}$.

542 Доказать тождество:

1) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + \sin 2\alpha = \sqrt{2}\cos\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$;

2) $\cos\alpha + \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - \alpha\right) = 0$;

3) $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 1 - 2\sin^2 2\alpha} = 2\sin\alpha$.

543 Записать в виде произведения:

1) $\cos 22^\circ + \cos 24^\circ + \cos 26^\circ + \cos 28^\circ$;

2) $\cos\dfrac{\pi}{12} + \cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{5\pi}{6}$.

544 Доказать тождество $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ и вычислить:

1) $\operatorname{tg} 267^\circ + \operatorname{tg} 93^\circ$; 2) $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{12} + \operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{12}$.

545 Разложить на множители:

1) $1 - \cos\alpha + \sin\alpha$; 2) $1 - 2\cos\alpha + \cos 2\alpha$;

3) $1 + \sin\alpha - \cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha$; 4) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha$.

Упражнения к главе V

546 Найти:

1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ и $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

3) $\sin \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

4) $\cos \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

547 Упростить выражение:

1) $2 \sin (\pi - \alpha) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 3 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 2$;

2) $\dfrac{\sin(\pi + \alpha) \cos \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg} (\pi + \alpha)}$.

Вычислить (548—549).

548 1) $\sin \frac{47\pi}{6}$; 2) $\operatorname{tg} \frac{25\pi}{4}$; 3) $\operatorname{ctg} \frac{27\pi}{4}$; 4) $\cos \frac{21\pi}{4}$.

549 1) $\cos \frac{23\pi}{4} - \sin \frac{15\pi}{4}$; 2) $\sin \frac{25\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{10\pi}{3}$;

3) $3 \cos 3660° + \sin (-1560°)$; 4) $\cos (-945°) + \operatorname{tg} 1035°$.

Упростить выражение (550—551).

550 1) $\left(\dfrac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha\right) \dfrac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$; 2) $\operatorname{ctg} \alpha \left(\dfrac{1 + \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} - \cos \alpha\right)$.

551 1) $\dfrac{\sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}$; 2) $\dfrac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}$.

552 Доказать тождество:

1) $1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \dfrac{\cos (\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$; 2) $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \dfrac{\sin (\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$.

Вычислить (553—554).

553 1) $2 \sin 6\alpha \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + 3\alpha\right) - \sin 6\alpha$ при $\alpha = \frac{5\pi}{24}$;

2) $\cos 3\alpha + 2 \cos (\pi - 3\alpha) \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - 1{,}5\alpha\right)$ при $\alpha = \frac{5\pi}{36}$.

554 1) $\dfrac{\sqrt{3} (\cos 75° - \cos 15°)}{1 - 2 \sin^2 15°}$; 2) $\dfrac{2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1}{1 + 8 \sin^2 \frac{\pi}{8} \cos^2 \frac{\pi}{8}}$.

555 Доказать тождество:

1) $\dfrac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$; 2) $\dfrac{2 \cos 2\alpha - \sin 4\alpha}{2 \cos 2\alpha + \sin 4\alpha} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

556 Показать, что:

1) $\sin 35° + \sin 25° = \cos 5°$; 2) $\cos 12° - \cos 48° = \sin 18°$.

Проверь себя!

1 Вычислить $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

2 Найти значение выражения:

1) $\cos 135°$; 2) $\sin\frac{8\pi}{3}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3}$; 4) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$.

3 Доказать тождество:

1) $3\cos 2\alpha + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 2\cos 2\alpha$;

2) $\dfrac{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{2\cos 4\alpha} = \sin\alpha$.

4 Упростить выражение:

1) $\sin(\alpha - \beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cdot\sin(-\beta)$;

2) $\cos^2(\pi - \alpha) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

3) $2\sin\alpha\sin\beta + \cos(\alpha + \beta)$.

557 Упростить выражение $\left(\dfrac{\cos\beta}{\sin\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right)\cdot\dfrac{1 - \cos 4\alpha}{\cos(\pi - \beta + \alpha)}$.

Доказать тождество **(558—559)**.

558 1) $\dfrac{\sin(2\alpha - 3\pi) + 2\cos\left(\frac{7\pi}{6} + 2\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) + \sqrt{3}\cos(2\alpha - 3\pi)} = -\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2\alpha$;

2) $\dfrac{2\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) - \sqrt{3}\sin(2{,}5\pi - 2\alpha)}{\cos(4{,}5\pi - 2\alpha) + 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha\right)} = \dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{3}}$.

559 1) $\dfrac{1 - \cos\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$; 2) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}}{1 + \cos\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

560 Вычислить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

561 Вычислить значение выражения

$\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{2}$.

562 Вычислить значение выражения

$\dfrac{4\sin 2\alpha + 5\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha - 3\cos 2\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$.

Доказать тождество (**563—564**).

563 1) $\sin^2(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$;

2) $\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha=4\sin 3\alpha\cos^2\alpha$.

564 $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\operatorname{tg} 3\alpha$.

565 Найти значение выражения $\dfrac{\sin\alpha}{\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$.

Доказать тождество (**566—567**).

566 $\sin^2\alpha+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=\dfrac{1}{4}$.

567 1) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=\dfrac{1}{8}(5+3\cos 4\alpha)$;

2) $\sin^8\alpha+\cos^8\alpha=\dfrac{1}{32}(\cos^2 4\alpha+14\cos 4\alpha+17)$.

VI

глава

Тригонометрические уравнения

Уравнение есть равенство, которое ещё не является истинным, но которое стремятся сделать истинным, не будучи уверенным, что этого можно достичь.

А. Фуше

§ 33 Уравнение $\cos x = a$

Из определения косинуса следует, что $-1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1$. Поэтому если $|a| > 1$, то уравнение $\cos x = a$ не имеет корней. Например, уравнение $\cos x = -1{,}5$ не имеет корней.

Задача 1 Решить уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

▶ Напомним, что $\cos x$ — абсцисса точки единичной окружности, полученной поворотом точки $P\ (1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол x. Абсциссу, равную $\frac{1}{2}$, имеют две точки окружности M_1 и M_2 (рис. 68). Так как $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, то точка M_1 получается из точки $P\ (1;\ 0)$ поворотом на угол $x_1 = \frac{\pi}{3}$, а также на углы $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = \pm1, \pm2, \ldots$. Точка M_2 получается из точки $P\ (1;\ 0)$ поворотом на угол $x_2 = -\frac{\pi}{3}$, а также на углы $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = \pm1, \pm2, \ldots$. Итак, все

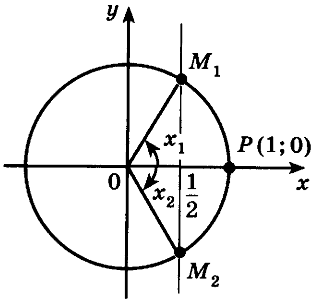


Рис. 68

корни уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ можно найти по формулам $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Вместо этих двух формул обычно пользуются одной:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}. \triangleleft$$

Задача 2 Решить уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$.

▶ Абсциссу, равную $-\frac{1}{2}$, имеют две точки окружности M_1 и M_2 (рис. 69). Так как $-\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$, то угол $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, а потому угол $x_2 = -\frac{2\pi}{3}$.

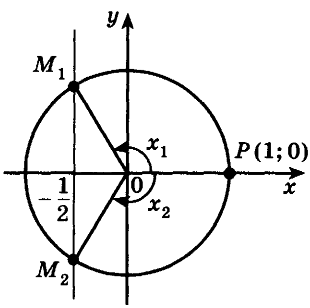


Рис. 69

Следовательно, все корни уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ можно найти по формуле $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. $\triangleleft$

Таким образом, каждое из уравнений $\cos x = \frac{1}{2}$ и $\cos x = -\frac{1}{2}$ имеет бесконечное множество корней. На отрезке $[0; \pi]$ каждое из этих уравнений имеет только один корень: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ — корень уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ и $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ — корень уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$. Число $\frac{\pi}{3}$ называют арккосинусом числа $\frac{1}{2}$ и записывают $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$; число $\frac{2\pi}{3}$ называют арккосинусом числа $\left(-\frac{1}{2}\right)$ и записывают $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Вообще, уравнение $\cos x = a$, где $-1 \leqslant a \leqslant 1$, имеет на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ только один корень. Если $a \geqslant 0$, то корень заключён в промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; если $a < 0$, то в промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Этот корень называют *арккосинусом числа a* и обозначают $\arccos a$ (рис. 70).

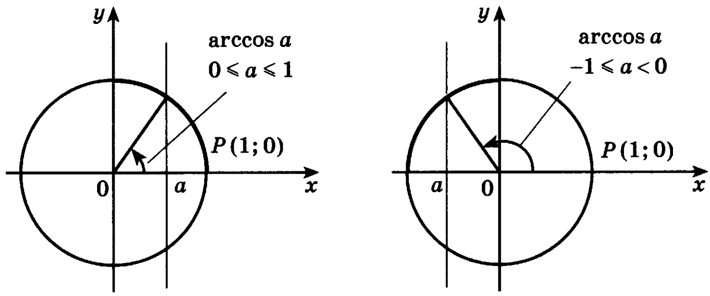


Рис. 70 *а)* *б)*

Арккосинусом числа $a \in [-1;\ 1]$ называется такое число $\alpha \in [0;\ \pi]$, косинус которого равен a:

$$\textbf{arccos}\ a = \alpha, \ \textbf{если} \ \cos\alpha = a \ \textbf{и} \ 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi. \qquad (1)$$

Например, $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, так как $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $0 \leqslant \frac{\pi}{6} \leqslant \pi$; $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$, так как $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $0 \leqslant \frac{5\pi}{6} \leqslant \pi$.

Аналогично тому, как это сделано при решении задач 1 и 2, можно показать, что все корни уравнения $\cos x = a$, где $|a| \leqslant 1$, можно находить по формуле

$$\boldsymbol{x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z}. \qquad (2)$$

Задача 3 Решить уравнение $\cos x = -0{,}75$.

▶ По формуле (2) находим

$$x = \pm\arccos(-0{,}75) + 2\pi n, \ \ n \in \boldsymbol{Z}. \ \triangleleft$$

Значение $\arccos(-0{,}75)$ можно приближённо найти по рисунку 71, измеряя угол POM транспортиром, или с помощью микрокалькулятора:

$$\arccos(-0{,}75) \approx 2{,}42.$$

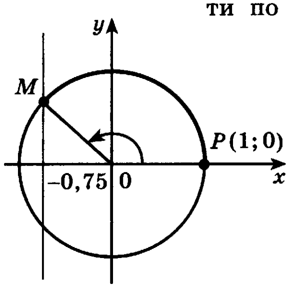


Рис. 71

Задача 4* Решить уравнение

$$(4\cos x - 1)(2\cos 2x + 1) = 0.$$

▶ 1) $4\cos x - 1 = 0$, $\cos x = \frac{1}{4}$,

$$x = \pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi n, \ \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

2) $2\cos 2x + 1 = 0$, $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, $2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$,

$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ $x = \pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Можно доказать, что для любого $a \in [-1; 1]$ справедлива формула

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a. \qquad (3)$$

Эта формула позволяет находить значения арккосинусов отрицательных чисел через значения арккосинусов положительных чисел. Например:

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3},$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Из формулы (2) следует, что корни уравнения $\cos x = a$ при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ можно находить по более простым формулам:

$$\cos x = 0,\quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\quad n \in \boldsymbol{Z}, \qquad (4)$$

$$\cos x = 1,\quad x = 2\pi n,\quad n \in \boldsymbol{Z}, \qquad (5)$$

$$\cos x = -1,\quad x = \pi + 2\pi n,\quad n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (6)$$

Задача 5 Решить уравнение $\cos\frac{x}{3} = -1$.

▶ По формуле (6) получаем $\frac{x}{3} = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, откуда $x = 3\pi + 6\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Упражнения

Вычислить (568—569).

568 1) $\arccos 0$; 2) $\arccos 1$; 3) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\arccos\frac{1}{2}$; 5) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

569 1) $2\arccos 0 + 3\arccos 1$; 2) $3\arccos(-1) - 2\arccos 0$;

3) $12\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

4) $4\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 6\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

570 Сравнить числа:

1) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\arccos \frac{1}{2}$; 2) $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$ и $\arccos(-1)$;

3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Решить уравнение (571—573).

571 1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

572 1) $\cos x = \frac{3}{4}$; 2) $\cos x = -0{,}3$; 3) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

573 1) $\cos 4x = 1$; 2) $\cos 2x = -1$; 3) $\sqrt{2}\cos\frac{x}{4} = -1$;

4) $2\cos\frac{x}{3} = \sqrt{3}$; 5) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$; 6) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

574 1) $\cos x \cos 3x = \sin 3x \sin x$;

2) $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = 0$.

575 Выяснить, имеет ли смысл выражение:

1) $\arccos(\sqrt{6} - 3)$; 2) $\arccos(\sqrt{7} - 2)$; 3) $\arccos(2 - \sqrt{10})$;

4) $\arccos(1 - \sqrt{5})$; 5) $\mathrm{tg}\left(3\arccos\frac{1}{2}\right)$.

576 Решить уравнение:

1) $\cos^2 2x = 1 + \sin^2 2x$; 2) $4\cos^2 x = 3$;

3) $2\cos^2 x = 1 + 2\sin^2 x$; 4) $2\sqrt{2}\cos^2 x = 1 + \sqrt{2}$;

5) $(1 + \cos x)(3 - 2\cos x) = 0$;

6) $(1 - \cos x)(4 + 3\cos 2x) = 0$;

7) $(1 + 2\cos x)(1 - 3\cos x) = 0$;

8) $(1 - 2\cos x)(2 + 3\cos x) = 0$.

577 Найти все корни уравнения $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

578 Найти все корни уравнения $\cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, удовлетворяющие неравенству $|x| < \frac{\pi}{4}$.

579 Решить уравнение:

1) $\arccos(2x - 3) = \frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos\frac{x+1}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

580 Доказать, что при всех значениях a, таких, что $-1 \leqslant a \leqslant 1$, выполняется равенство $\cos(\arccos a) = a$. Вычислить:

1) $\cos(\arccos 0{,}2)$; 2) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$;

3) $\cos\left(\pi + \arccos\frac{3}{4}\right)$; 4) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \arccos\frac{1}{3}\right)$;

5) $\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

581 Доказать, что $\arccos(\cos\alpha) = \alpha$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Вычислить:

1) $5\arccos\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)$; 2) $3\arccos(\cos 2)$;

3) $\arccos\left(\cos\frac{8\pi}{7}\right)$; 4) $\arccos(\cos 4)$.

582 Вычислить:

1) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3} + \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$; 2) $\cos\left(\arccos\frac{4}{5} - \arccos\frac{3}{5}\right)$.

583 Упростить выражение $\cos(2\arccos a)$, если $-1 \leqslant a \leqslant 1$.

584 Доказать, что если $-1 \leqslant a \leqslant 1$, то $2\arccos\sqrt{\frac{1+a}{2}} = \arccos a$.

585 С помощью микрокалькулятора решить уравнение:

1) $\cos x = 0{,}35$; 2) $\cos x = -0{,}27$.

§ 34 Уравнение $\sin x = a$

Из определения синуса следует, что $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$. Поэтому если $|a| > 1$, то уравнение $\sin x = a$ не имеет корней. Например, уравнение $\sin x = 2$ не имеет корней.

Задача 1 Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

▶ Напомним, что $\sin x$ — ордината точки единичной окружности, полученной поворотом точки $P(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол x. Ординату, равную $\frac{1}{2}$, имеют две точки окружности M_1 и M_2 (рис. 72). Так как $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$, то точка M_1 получается из точки $P(1;\ 0)$ поворотом на угол $x_1 = \frac{\pi}{6}$,

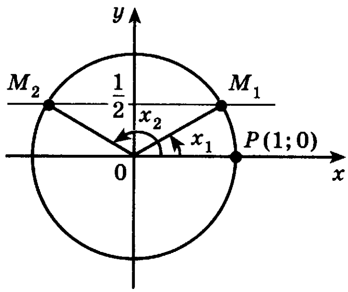


Рис. 72

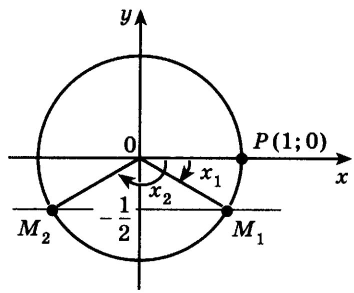


Рис. 73

а также на углы $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Точка M_2 получается из точки P (1; 0) поворотом на угол $x_2 = \frac{5\pi}{6}$, а также на углы $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, т. е. на углы $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Итак, все корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ можно найти по формулам $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Эти формулы объединяются в одну:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (1)$$

В самом деле, если n — чётное число, т. е. $n = 2k$, то из формулы (1) получаем $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, а если n — нечётное число, т. е. $n = 2k + 1$, то из формулы (1) получаем $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

Ответ $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Задача 2 Решить уравнение $\sin x = -\frac{1}{2}$.

▶ Ординату, равную $-\frac{1}{2}$, имеют две точки единичной окружности M_1 и M_2 (рис. 73), где $x_1 = -\frac{\pi}{6}$, $x_2 = -\frac{5\pi}{6}$. Следовательно, все корни уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$ можно найти по формулам

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Эти формулы объединяются в одну:

$$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (2)$$

В самом деле, если $n = 2k$, то по формуле (2) получаем $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, а если $n = 2k - 1$, то по формуле (2) находим $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$.

Ответ $x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Итак, каждое из уравнений $\sin x = \frac{1}{2}$ и $\sin x = -\frac{1}{2}$ имеет бесконечное множество корней. На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ каждое из этих уравнений имеет только один корень: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ — корень уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ и $x_1 = -\frac{\pi}{6}$ — корень уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Число $\frac{\pi}{6}$ называют арксинусом числа $\frac{1}{2}$ и записывают $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; число $-\frac{\pi}{6}$ называют арксинусом числа $-\frac{1}{2}$ и пишут $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Вообще, уравнение $\sin x = a$, где $-1 \leqslant a \leqslant 1$, на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ имеет только один корень. Если $a \geqslant 0$, то корень заключён в промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; если $a < 0$, то корень заключён в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Этот корень называют *арксинусом числа a* и обозначают $\arcsin a$ (рис. 74).

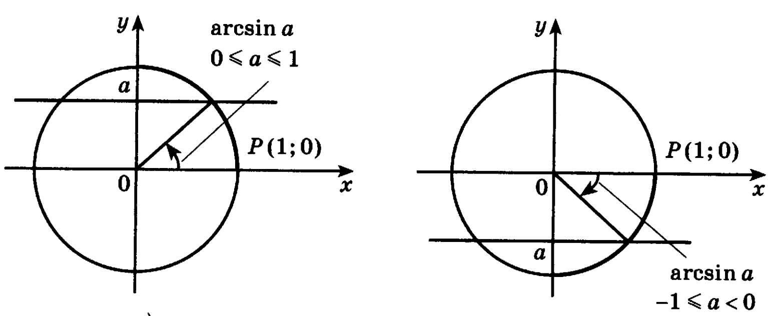


Рис. 74 *а)* *б)*

Арксинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется такое число $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a:

$$\arcsin a = \alpha, \text{ если } \sin \alpha = a \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

Например, $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, так как $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{2}$; $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, так как $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant -\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Аналогично тому, как это сделано при решении задач 1 и 2, можно показать, что корни уравнения $\sin x = a$, где $|a| \leqslant 1$, выражаются формулой

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \; n \in Z. \quad (4)$$

Задача 3 Решить уравнение $\sin x = \frac{2}{3}$.

▶ По формуле (4) находим $x = (-1)^n \arcsin \frac{2}{3} + \pi n$, $n \in Z$. ◁

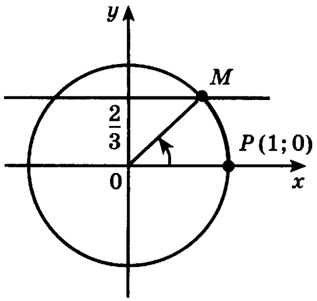


Рис. 75

Значение $\arcsin \frac{2}{3}$ можно приближённо найти из рисунка 75, измеряя угол POM транспортиром.

Значения арксинуса можно находить с помощью специальных таблиц или микрокалькулятора. Например, значение $\arcsin \frac{2}{3}$ можно вычислить на микрокалькуляторе:

$$\arcsin \frac{2}{3} \approx 0{,}73.$$

Задача 4* Решить уравнение

$$(3 \sin x - 1)(2 \sin 2x + 1) = 0.$$

▶ 1) $3 \sin x - 1 = 0$, $\sin x = \frac{1}{3}$,

$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n$, $n \in Z$;

2) $2 \sin 2x + 1 = 0$, $\sin 2x = -\frac{1}{2}$,

$$2x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n =$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z.$$

Ответ $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n, \ x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \ n \in Z.$ ◁

Можно доказать, что для любого $a \in [-1; 1]$ справедлива формула

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a. \qquad (5)$$

Эта формула позволяет находить значения арксинусов отрицательных чисел через значения арксинусов положительных чисел. Например:

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6},$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}.$$

Отметим, что из формулы (4) следует, что корни уравнения $\sin x = a$ при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ можно находить по более простым формулам:

$$\sin x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in Z, \qquad (6)$$

$$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z, \qquad (7)$$

$$\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z. \qquad (8)$$

Задача 5 Решить уравнение $\sin 2x = 1$.

▶ По формуле (7) имеем $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. ◁

Упражнения

Вычислить (586—587).

586 1) $\arcsin 0$; 2) $\arcsin 1$; 3) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\arcsin\frac{1}{2}$; 5) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 6) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

587 1) $\arcsin 1 - \arcsin(-1)$; 2) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

3) $\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

588 Сравнить числа:

1) $\arcsin\frac{1}{4}$ и $\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)$; 2) $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$ и $\arcsin(-1)$.

Решить уравнение (589—592).

589 1) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

590 1) $\sin x=\frac{2}{7}$; 2) $\sin x=-\frac{1}{4}$; 3) $\sin x=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

591 1) $\sin 3x=1$; 2) $\sin 2x=-1$; 3) $\sqrt{2}\sin\frac{x}{3}=-1$;

4) $2\sin\frac{x}{2}=\sqrt{3}$; 5) $\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=0$; 6) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=0$.

592 1) $\sin 4x\cos 2x=\cos 4x\sin 2x$;

2) $\cos 2x\sin 3x=\sin 2x\cos 3x$.

593 Выяснить, имеет ли смысл выражение:

1) $\arcsin(\sqrt{5}-2)$; 2) $\arcsin(\sqrt{5}-3)$;

3) $\arcsin(3-\sqrt{17})$; 4) $\arcsin(2-\sqrt{10})$;

5) $\operatorname{tg}\left(6\arcsin\frac{1}{2}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решить уравнение (594—596).

594 1) $1-4\sin x\cos x=0$; 2) $\sqrt{3}+4\sin x\cos x=0$;

3) $1+6\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}=0$; 4) $1-8\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}=0$.

595 1) $1+\cos 5x\sin 4x=\cos 4x\sin 5x$;

2) $1-\sin x\cos 2x=\cos x\sin 2x$.

596 1) $(4\sin x-3)(2\sin x+1)=0$;

2) $(4\sin 3x-1)(2\sin x+3)=0$.

597 Найти все корни уравнения $\sin 2x=\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[0;\ 2\pi]$.

598 Найти все корни уравнения $\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, удовлетворяющие неравенству $\log_\pi(x-4\pi)<1$.

599 Доказать, что $\sin(\arcsin a)=a$ при $-1\leqslant a\leqslant 1$. Вычислить:

1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{7}\right)$; 2) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{5}\right)\right)$;

3) $\sin\left(\pi+\arcsin\frac{3}{4}\right)$; 4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{3}\right)$;

5) $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

600 Доказать, что $\arcsin(\sin\alpha)=\alpha$ при $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Вычислить:

1) $7\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)$; 2) $4\arcsin\left(\sin\frac{1}{2}\right)$;

3) $\arcsin\left(\sin\frac{6\pi}{7}\right)$; 4) $\arcsin(\sin 5)$.

Вычислить (601—603).

601 1) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$; 2) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$;

3) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$; 4) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$.

602 1) $\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$; 2) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

603 1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$; 2) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{4}{5}\right)$.

604 Решить уравнение:

1) $\arcsin\left(\frac{x}{2}-3\right)=\frac{\pi}{6}$; 2) $\arcsin(3-2x)=-\frac{\pi}{4}$.

605 Доказать, что если $0\leqslant a\leqslant 1$, то $2\arcsin a=\arccos(1-2a^2)$.

606 С помощью микрокалькулятора решить уравнение:
1) $\sin x=0{,}65$; 2) $\sin x=-0{,}31$.

§ 35 Уравнение $\operatorname{tg} x = a$

Из определения тангенса следует, что $\operatorname{tg} x$ может принимать любое действительное значение. Поэтому уравнение $\operatorname{tg} x=a$ имеет корни при любом значении a.

Задача 1 Решить уравнение $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$.

▶ Построим углы, тангенсы которых равны $\sqrt{3}$. Для этого проведём через точку P (рис. 76) прямую, перпендикулярную PO, и отложим отре-

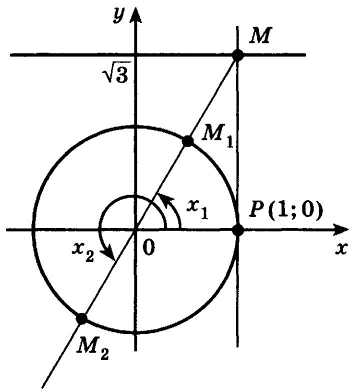


Рис. 76

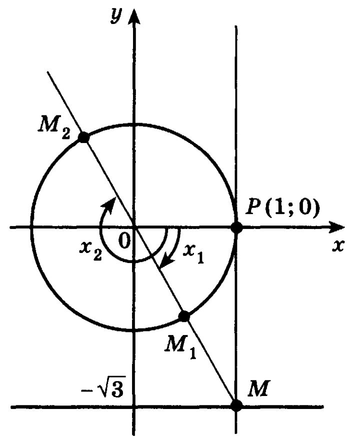


Рис. 77

зок $PM = \sqrt{3}$; через точки M и O проведём прямую. Эта прямая пересекает единичную окружность в двух диаметрально противоположных точках M_1 и M_2. Из прямоугольного треугольника POM находим $\frac{PM}{PO} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = \operatorname{tg} x_1$, откуда $x_1 = \frac{\pi}{3}$. Таким образом, точка M_1 получается из точки P (1; 0) поворотом вокруг начала координат на угол $\frac{\pi}{3}$, а также на углы $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = \pm1, \pm2, \ldots$.

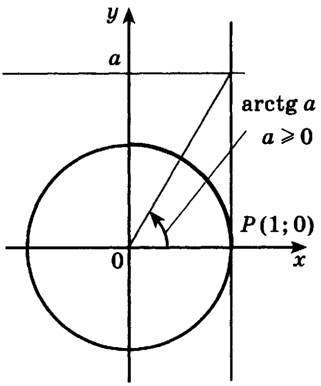
Точка M_2 получается поворотом точки P (1; 0) на угол $x_2 = \frac{\pi}{3} + \pi$, а также на углы $x = \frac{\pi}{3} + \pi + 2\pi k$, где $k = \pm1, \pm2, \ldots$.

Итак, корни уравнения $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ можно найти по формулам $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + \pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. Эти формулы объединяются в одну:

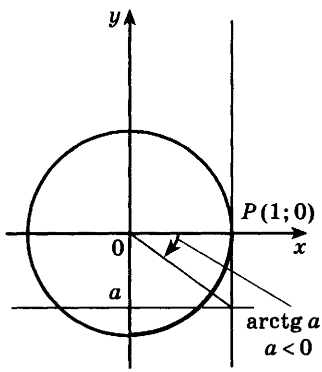
$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \ \triangleleft$$

Задача 2 Решить уравнение $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

▶ Углы, тангенсы которых равны $-\sqrt{3}$, указаны на рисунке 77, где $PM \perp PO$, $PM = \sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника POM находим $\angle POM = \frac{\pi}{3}$,



а)



б)

Рис. 78

т. е. $x_1 = -\frac{\pi}{3}$. Таким образом, точка M_1 получается поворотом точки $P\ (1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол $x_1 = -\frac{\pi}{3}$, а также на углы $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$. Точка M_2 получается поворотом точки $P\ (1;\ 0)$ на углы $x = -\frac{\pi}{3} + \pi\ (2k + 1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Поэтому корни уравнения $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ можно найти по формуле

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \ \triangleleft$$

Итак, каждое из уравнений $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ и $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ имеет бесконечное множество корней. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ каждое из этих уравнений имеет только один корень: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ — корень уравнения $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ и $x_1 = -\frac{\pi}{3}$ — корень уравнения $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$. Число $\frac{\pi}{3}$ называют арктангенсом числа $\sqrt{3}$ и записывают $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$; число $-\frac{\pi}{3}$ называют арктангенсом числа $-\sqrt{3}$ и пишут $\operatorname{arctg}\ (-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$. Вообще, уравнение $\operatorname{tg} x = a$ для любого $a \in \boldsymbol{R}$ имеет на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ только один корень. Если $a \geqslant 0$, то корень заключён в промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$; если $a < 0$, то в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$. Этот корень называют *арктангенсом числа a* и обозначают $\operatorname{arctg} a$ (рис. 78).

Арктангенсом числа $a \in \boldsymbol{R}$ называется такое число $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a:

$$\mathbf{arctg}\ a = \alpha, \text{ если } \mathbf{tg}\ \alpha = a \text{ и } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Например, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ и $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$, так как $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$.

Аналогично тому, как это сделано при решении задач 1 и 2, можно показать, что все корни уравнения $\operatorname{tg} x = a$, где $a \in \boldsymbol{R}$, выражаются формулой

$$\boldsymbol{x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z.} \qquad (2)$$

Задача 3 Решить уравнение $\operatorname{tg} x = 2$.

▶ По формуле (2) находим

$$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \ \triangleleft$$

Значение arctg 2 можно приближённо найти из рисунка 79, измеряя угол POM транспортиром.

Приближённые значения арктангенса можно также найти по таблицам или с помощью микрокалькулятора:

$$\operatorname{arctg} 2 \approx 1{,}11.$$

Задача 4* Решить уравнение $(\operatorname{tg} x + 4)(\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}) = 0$.

▶ 1) $\operatorname{tg} x + 4 = 0$, $\operatorname{tg} x = -4$, $x = \operatorname{arctg}(-4) + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

При этих значениях x первый множитель левой части исходного уравнения обращается в нуль, а второй не теряет смысла, так как из равенства $\operatorname{tg} x = -4$ следует, что $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{4}$. Следовательно, найденные значения x являются корнями исходного уравнения.

2) $\operatorname{ctg} x - \sqrt{3} = 0$, $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$,

$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\quad x = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Эти значения x также являются корнями исходного уравнения, так как при этом второй множитель левой части уравнения равен нулю, а первый не теряет смысла.

Ответ $x = \operatorname{arctg}(-4) + \pi n$,
$x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. $\triangleleft$

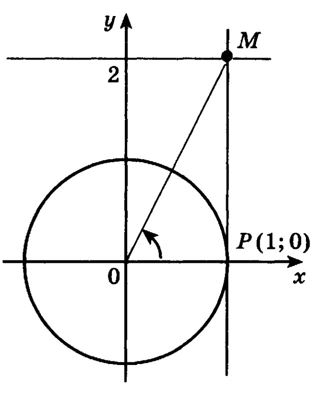


Рис. 79

Можно доказать, что для любого $a \in \boldsymbol{R}$ справедлива формула

$$\mathbf{arctg}\,(-a) = -\mathbf{arctg}\,a. \qquad (3)$$

Эта формула позволяет находить значения арктангенсов отрицательных чисел через значения арктангенсов положительных чисел. Например:

$$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Упражнения

Вычислить (**607—608**).

607 1) $\operatorname{arctg} 0$; 2) $\operatorname{arctg}(-1)$; 3) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; 4) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

608 1) $6\operatorname{arctg}\sqrt{3} - 4\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

2) $2\operatorname{arctg} 1 + 3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

3) $5\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) - 3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

609 Сравнить числа:

1) $\operatorname{arctg}(-1)$ и $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ и $\arccos\frac{1}{2}$;

3) $\operatorname{arctg}(-3)$ и $\operatorname{arctg} 2$; 4) $\operatorname{arctg}(-5)$ и $\operatorname{arctg} 0$.

Решить уравнение (**610—612**).

610 1) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$;

4) $\operatorname{tg} x = -1$; 5) $\operatorname{tg} x = 4$; 6) $\operatorname{tg} x = -5$.

611 1) $\operatorname{tg} 3x = 0$; 2) $1 + \operatorname{tg}\frac{x}{3} = 0$; 3) $\sqrt{3} + \operatorname{tg}\frac{x}{6} = 0$.

612 1) $(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0$;

2) $(\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0$;

3) $(\operatorname{tg} x - 2)(2\cos x - 1) = 0$;

4) $(\operatorname{tg} x - 4{,}5)(1 + 2\sin x) = 0$;

5) $(\operatorname{tg} x + 4)\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right) = 0$;

6) $\left(\operatorname{tg}\frac{x}{6} + 1\right)(\operatorname{tg} x - 1) = 0$.

613 Найти наименьший положительный и наибольший отрицательный корни уравнения $3\ \mathrm{tg}\ x - \sqrt{3} = 0$.

614 Решить уравнение:

1) $\mathrm{arctg}\ (5x - 1) = \frac{\pi}{4}$; 2) $\mathrm{arctg}\ (3 - 5x) = -\frac{\pi}{3}$.

615 Доказать, что $\mathrm{tg}\ (\mathrm{arctg}\ a) = a$ при любом a. Вычислить:

1) $\mathrm{tg}\ (\mathrm{arctg}\ 2{,}1)$; 2) $\mathrm{tg}\ (\mathrm{arctg}\ (-0{,}3))$;

3) $\mathrm{tg}\ (\pi - \mathrm{arctg}\ 7)$; 4) $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\ 6\right)$.

616 Доказать, что $\mathrm{arctg}\ (\mathrm{tg}\ \alpha) = \alpha$ при $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Вычислить:

1) $3\,\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\ \frac{\pi}{7}\right)$; 2) $4\ \mathrm{arctg}\ (\mathrm{tg}\ 0{,}5)$;

3) $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\ \frac{7\pi}{8}\right)$; 4) $\mathrm{arctg}\ (\mathrm{tg}\ 13)$.

617 Вычислить:

1) $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{ctg}\ \frac{5\pi}{6}\right)$; 2) $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{ctg}\ \frac{3\pi}{4}\right)$;

3) $\mathrm{arctg}\left(2\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; 4) $\mathrm{arctg}\left(2\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

618 Доказать, что при любом действительном значении a справедливо равенство $\cos\ (\mathrm{arctg}\ a) = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$.

619 С помощью микрокалькулятора решить уравнение:

1) $\mathrm{tg}\ x = 9$; 2) $\mathrm{tg}\ x = -7{,}8$.

§ 36 Решение тригонометрических уравнений

В предыдущих параграфах были выведены формулы корней простейших тригонометрических уравнений $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg}\ x = a$. К этим уравнениям сводятся другие тригонометрические уравнения. Для решения большинства таких уравнений требуется применение различных формул и преобразований тригонометрических выражений. Рассмотрим некоторые примеры решения тригонометрических уравнений.

1. Уравнения, сводящиеся к квадратным.

Задача 1 Решить уравнение $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$.

▶ Это уравнение является квадратным относительно $\sin x$. Обозначив $\sin x = y$, получим уравнение $y^2 + y - 2 = 0$. Его корни $y_1 = 1$, $y_2 = -2$. Таким образом, решение исходного уравнения свелось к решению простейших уравнений $\sin x = 1$ и $\sin x = -2$.

Уравнение $\sin x = 1$ имеет корни $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; уравнение $\sin x = -2$ не имеет корней.

Ответ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Задача 2 Решить уравнение $2\cos^2 x - 5\sin x + 1 = 0$.

▶ Заменяя $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получаем

$$2(1 - \sin^2 x) - 5\sin x + 1 = 0, \text{ или}$$
$$2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0.$$

Обозначая $\sin x = y$, получаем $2y^2 + 5y - 3 = 0$, откуда $y_1 = -3$, $y_2 = \frac{1}{2}$.

1) $\sin x = -3$ — уравнение не имеет корней, так как $|-3| > 1$;

2) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Задача 3 Решить уравнение $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$.

▶ Используя формулу $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, получаем

$$2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 = 0,$$
$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0, \ \cos x = y,$$
$$2y^2 - y - 1 = 0, \ y_1 = 1, \ y_2 = -\frac{1}{2}.$$

1) $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n =$

$$= \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n =$$

$$= \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ $x = 2\pi n,\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$ ◁

Задача 4 Решить уравнение $\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x + 1 = 0.$

▶ Так как $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, то уравнение можно записать в виде

$$\operatorname{tg} x - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + 1 = 0.$$

Умножая обе части уравнения на $\operatorname{tg} x$, получаем

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = y,\ y^2 + y - 2 = 0,\ y_1 = 1,\ y_2 = -2.$$

1) $\operatorname{tg} x = 1,\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z};$

2) $\operatorname{tg} x = -2,\ x = \operatorname{arctg}(-2) + \pi n = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n,$
$n \in \mathbf{Z}.$

Отметим, что левая часть исходного уравнения имеет смысл, если $\operatorname{tg} x \neq 0$ и $\operatorname{ctg} x \neq 0$. Так как для найденных корней $\operatorname{tg} x \neq 0$ и $\operatorname{ctg} x \neq 0$, то исходное уравнение равносильно уравнению

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

Ответ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$ ◁

Задача 5 Решить уравнение $3\cos^2 6x + 8 \sin 3x \cos 3x - 4 = 0.$

▶ Используя формулы

$$\sin^2 6x + \cos^2 6x = 1,\ \sin 6x = 2 \sin 3x \cos 3x,$$

преобразуем уравнение:

$$3(1 - \sin^2 6x) + 4 \sin 6x - 4 = 0,$$

$$3\sin^2 6x - 4 \sin 6x + 1 = 0.$$

Обозначим $\sin 6x = y$, получим уравнение

$$3y^2 - 4y + 1 = 0, \text{ откуда } y_1 = 1,\ y_2 = \frac{1}{3}.$$

1) $\sin 6x = 1,\ \ 6x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z};$

2) $\sin 6x = \frac{1}{3},\ \ 6x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n,$

$$x = \frac{(-1)^n}{6} \arcsin\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{6},\ n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3},\ x = \frac{(-1)^n}{6} \arcsin\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{6},\ n \in \mathbf{Z}.$ ◁

2. Уравнение $a \sin x + b \cos x = c$.

Задача 6 Решить уравнение $2 \sin x - 3 \cos x = 0$.

▶ Поделив уравнение на $\cos x$, получим $2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$, $\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$, $x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◁

При решении этой задачи обе части уравнения $2 \sin x - 3 \cos x = 0$ были поделены на $\cos x$. Напомним, что при делении уравнения на выражение, содержащее неизвестное, могут быть потеряны корни. Поэтому нужно проверить, не являются ли корни уравнения $\cos x = 0$ корнями данного уравнения. Если $\cos x = 0$, то из уравнения $2 \sin x - 3 \cos x = 0$ следует, что $\sin x = 0$. Однако $\sin x$ и $\cos x$ не могут одновременно равняться нулю, так как они связаны равенством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Следовательно, при делении уравнения $a \sin x + b \cos x = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, на $\cos x$ (или $\sin x$) получаем уравнение, равносильное данному.

Задача 7 Решить уравнение $2 \sin x + \cos x = 2$.

▶ Используя формулы $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ и записывая правую часть уравнения в виде $2 = 2 \cdot 1 = 2\left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right)$, получаем

$$4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{2},$$

$$3 \sin^2 \frac{x}{2} - 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 0.$$

Поделив это уравнение на $\cos^2 \frac{x}{2}$, получим равносильное уравнение $3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0$. Обозначая $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$, получаем уравнение $3y^2 - 4y + 1 = 0$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{1}{3}$.

1) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$, $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

2) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$, $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n$, $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◁

Уравнение, рассмотренное в задаче 7, является уравнением вида

$$a \sin x + b \cos x = c, \qquad (1)$$

где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, которое можно решить другим способом (при условии, что $c^2 \leqslant a^2 + b^2$). Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (2)$$

Введём вспомогательный аргумент φ, такой, что

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Такое число φ существует, так как

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1.$$

Таким образом, уравнение (2) можно записать в виде $\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, откуда

$$\sin (x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (3)$$

Изложенный метод преобразования уравнения (1) к простейшему тригонометрическому уравнению (3) называется *методом введения вспомогательного угла*.

Задача 8 Решить уравнение $4 \sin x + 3 \cos x = 5$.

▶ Здесь $a = 4$, $b = 3$, $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$.

Поделим обе части уравнения на 5:

$$\frac{4}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x = 1.$$

Введём вспомогательный аргумент φ, такой, что $\cos \varphi = \frac{4}{5}$, $\sin \varphi = \frac{3}{5}$. Исходное уравнение можно записать в виде

$$\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = 1, \ \ \sin (x + \varphi) = 1,$$

откуда $x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $\varphi = \arccos \frac{4}{5}$,

$$x = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{5} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ $x = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{5} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

3. Уравнения, решаемые разложением левой части на множители.

Многие тригонометрические уравнения, правая часть которых равна нулю, решаются разложением их левой части на множители.

Задача 9 Решить уравнение $\sin 2x - \sin x = 0$.

▶ Используя формулу синуса двойного аргумента, запишем уравнение в виде $2 \sin x \cos x - \sin x = 0$. Вынося общий множитель $\sin x$ за скобки, получаем $\sin x\,(2 \cos x - 1) = 0$.

1) $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $2 \cos x - 1 = 0$, $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ $x = \pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Задача 10 Решить уравнение $\cos 3x + \sin 5x = 0$.

▶ Используя формулу приведения $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$,

запишем уравнение в виде $\cos 3x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0$.

Используя формулу суммы косинусов, получаем

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

1) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$, $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{3}{4}\pi + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, $4x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{3}{16}\pi + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ $x = \frac{3}{4}\pi + \pi n$, $x = \frac{3}{16}\pi + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Задача 11 Решить уравнение $\sin 7x + \sin 3x = 3 \cos 2x$.

▶ Применяя формулу для суммы синусов, запишем уравнение в виде

$$2 \sin 5x \cos 2x = 3 \cos 2x,$$
$$2 \sin 5x \cos 2x - 3 \cos 2x = 0,$$

откуда $\cos 2x\left(\sin 5x - \frac{3}{2}\right) = 0$.

Уравнение $\cos 2x = 0$ имеет корни $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, а уравнение $\sin 5x = \frac{3}{2}$ не имеет корней.

Ответ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Задача 12 Решить уравнение $\cos 3x \cos x = \cos 2x$.

▶ $\cos 2x = \cos(3x - x) = \cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x$, поэтому уравнение примет вид $\sin x \sin 3x = 0$.

1) $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\sin 3x = 0$, $x = \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Заметим, что числа πn содержатся среди чисел вида $x = \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, так как если $n = 3k$, то $\dfrac{\pi n}{3} = \pi k$. Следовательно, первая серия корней содержится во второй.

Ответ $x = \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Иногда при решении тригонометрических уравнений ответ записывают в виде серий корней, имеющих общую часть.

Например, для уравнения $\cos 3x \sin 2x = 0$ ответ можно записать в виде двух серий корней:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ x = \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Так как все корни уравнения $\cos x = 0$ являются корнями уравнения $\cos 3x = 0$, то ответ можно записать в виде двух непересекающихся серий:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Задача 13* Решить уравнение $(\operatorname{tg} x + 1)\left(2\cos\dfrac{x}{3} - \sqrt{3}\right) = 0$.

▶ 1) $\operatorname{tg} x + 1 = 0$, $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Эти значения x являются корнями исходного уравнения, так как при этом первый множитель левой части равен нулю, а второй не теряет смысла.

2) $2\cos\dfrac{x}{3} - \sqrt{3} = 0$, $\cos\dfrac{x}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{x}{3} = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$,

$x = \pm\dfrac{\pi}{2} + 6\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

При этих значениях x второй множитель левой части исходного уравнения равен нулю, а первый не имеет смысла. Поэтому эти значения не являются корнями исходного уравнения.

Ответ $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Задача 14* Решить уравнение $6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5$.

▶ Выразим $\sin^2 x$ через $\cos 2x$. Так как $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, то $\cos 2x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x$, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, откуда $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

Поэтому исходное уравнение можно записать так:

$$3\ (1 - \cos 2x) + 2\ (1 - \cos^2 2x) = 5,$$

или $2 \cos^2 2x + 3 \cos 2x = 0$, откуда

$$\cos 2x\ (2 \cos 2x + 3) = 0.$$

1) $\cos 2x = 0,\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z};$

2) уравнение $\cos 2x = -\frac{3}{2}$ корней не имеет.

Ответ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Задача 15* Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{1}{2}, \\ \cos x \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

▶ Складывая уравнения данной системы и вычитая из второго уравнения первое, получаем равносильную систему $\begin{cases} \sin x \cos y + \cos x \sin y = 0, \\ \cos x \sin y - \sin x \cos y = 1, \end{cases}$

откуда $\begin{cases} \sin (x + y) = 0, \\ \sin (y - x) = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = \pi n, \\ y - x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ n, k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$

Решая последнюю систему, находим

$$x = \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4} - \pi k = \pi\left(\frac{n}{2} - k - \frac{1}{4}\right),$$

$$y = \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi k = \pi\left(\frac{n}{2} + k + \frac{1}{4}\right).$$

Ответ $\left(\pi\left(\frac{n}{2} - k - \frac{1}{4}\right);\ \pi\left(\frac{n}{2} + k + \frac{1}{4}\right)\right),\ n,\ k \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Отметим, что в равенствах $\begin{cases} x + y = \pi n, \\ y - x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$

буквы n и k могут принимать различные целые значения независимо друг от друга. Если в обоих равенствах написать одну букву n, то будут потеряны решения. Например:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ y - x = \frac{\pi}{2} + 2\pi, \end{cases}$$

т. е. $x = -\frac{\pi}{4} - \pi,\ y = \frac{\pi}{4} + \pi.$

Упражнения

Решить уравнение (620—644).

620 1) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$; 2) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$;

3) $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; 4) $2 \cos^2 x + \cos x - 6 = 0$.

621 1) $2 \cos^2 x - \sin x + 1 = 0$; 2) $3 \cos^2 x - \sin x - 1 = 0$;

3) $4 \sin^2 x - \cos x - 1 = 0$; 4) $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$.

622 1) $\operatorname{tg}^2 x = 2$; 2) $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$;

3) $\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 4 = 0$; 4) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1 = 0$.

623 1) $1 + 7 \cos^2 x = 3 \sin 2x$; 2) $3 + \sin 2x = 4 \sin^2 x$;

3) $\cos 2x + \cos^2 x + \sin x \cos x = 0$;

4) $3 \cos 2x + \sin^2 x + 5 \sin x \cos x = 0$.

624 1) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 0$; 2) $\cos x = \sin x$;

3) $\sin x = 2 \cos x$; 4) $2 \sin x + \cos x = 0$.

625 1) $\sin x - \cos x = 1$; 2) $\sin x + \cos x = 1$;

3) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2$; 4) $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$.

626 1) $\cos x = \cos 3x$; 2) $\sin 5x = \sin x$;

3) $\sin 2x = \cos 3x$; 4) $\sin x + \cos 3x = 0$.

627 1) $\cos 3x - \cos 5x = \sin 4x$; 2) $\sin 7x - \sin x = \cos 4x$;

3) $\cos x + \cos 3x = 4 \cos 2x$; 4) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos 4x$.

628 1) $(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})\left(2 \sin \frac{x}{12} + 1\right) = 0$;

2) $\left(1 - \sqrt{2} \cos \frac{x}{4}\right)(1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} x) = 0$;

3) $\left(2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1\right)(2 \operatorname{tg} x + 1) = 0$;

4) $\left(1 + \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)(\operatorname{tg} x - 3) = 0$.

629 1) $\sqrt{3} \sin x \cos x = \sin^2 x$; 2) $2 \sin x \cos x = \cos x$;

3) $\sin 4x + \sin^2 2x = 0$; 4) $\sin 2x + 2 \cos^2 x = 0$.

630 1) $2 \sin^2 x = 1 + \frac{1}{3} \sin 4x$; 2) $2 \cos^2 2x - 1 = \sin 4x$;

3) $2 \cos^2 2x + 3 \cos^2 x = 2$; 4) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \cos x$.

631 1) $2 \sin 2x - 3 (\sin x + \cos x) + 2 = 0$;

2) $\sin 2x + 3 = 3 \sin x + 3 \cos x$;

3) $\sin 2x + 4 (\sin x + \cos x) + 4 = 0$;

4) $\sin 2x + 5 (\cos x + \sin x + 1) = 0$.

632 1) $1-\cos(\pi-x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)=0;$

2) $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=(\sin x+\cos x)^2.$

633 1) $4\sin x\cos x\cos 2x=\sin^2 4x;$ 2) $1+\cos^2 x=\sin^4 x.$

634 1) $2\cos^2 2x+3\sin 4x+4\sin^2 2x=0;$

2) $1-\sin x\cos x+2\cos^2 x=0;$

3) $2\sin^2 x+\frac{1}{4}\cos^3 2x=1;$ 4) $\sin^2 2x+\cos^2 3x=1+4\sin x.$

635 1) $\cos x\cos 2x=\sin x\sin 2x;$ 2) $\sin 2x\cos x=\cos 2x\sin x;$

3) $\sin 3x=\sin 2x\cos x;$ 4) $\cos 5x\cos x=\cos 4x.$

636 1) $4\sin^2 x-5\sin x\cos x-6\cos^2 x=0;$

2) $3\sin^2 x-7\sin x\cos x+2\cos^2 x=0;$

3) $1-4\sin x\cos x+4\cos^2 x=0;$ 4) $1+\sin^2 x=2\sin x\cos x.$

637 1) $4\sin 3x+\sin 5x-2\sin x\cos 2x=0;$

2) $6\cos 2x\sin x+7\sin 2x=0.$

638 1) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x;$

2) $\sin x(1-\cos x)^2+\cos x(1-\sin x)^2=2.$

639 1) $\sin x\sin 2x\sin 3x=\frac{1}{4}\sin 4x;$

2) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}\sin^2 2x.$

640 1) $\cos^2 x+\cos^2 2x=\cos^2 3x+\cos^2 4x;$ 2) $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{1}{4}.$

641 1) $\frac{\cos 2x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\cos 2x}=1;$ 2) $\sin x+\frac{1}{\sin x}=\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}.$

642 1) $\sin x\sin 5x=1;$ 2) $\sin x\cos 4x=-1.$

643 1) $\sqrt{5\cos x-\cos 2x}=-2\sin x;$ 2) $\sqrt{\cos x+\cos 3x}=-\sqrt{2}\cos x.$

644 1) $4|\cos x|+3=4\sin^2 x;$ 2) $|\operatorname{tg} x|+1=\frac{1}{\cos^2 x}.$

645 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases}\cos(x+y)=0,\\ \cos(x-y)=1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin x-\sin y=1,\\ \sin^2 x+\cos^2 y=1.\end{cases}$

646 Найти все значения a, при которых уравнение

$$4\sin^2 x+2(a-3)\cos x+3a-4=0$$

имеет корни, и решить это уравнение.

647 Найти все значения a, при которых уравнение

$$\sin^2 x-\sin x\cos x-2\cos^2 x=a$$

не имеет корней.

§ 37* Примеры решения простейших тригонометрических неравенств

Задача 1 Решить неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$.

▶ По определению $\cos x$ — это абсцисса точки единичной окружности. Чтобы решить неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$, нужно выяснить, какие точки единичной окружности имеют абсциссу, большую $\frac{1}{2}$.

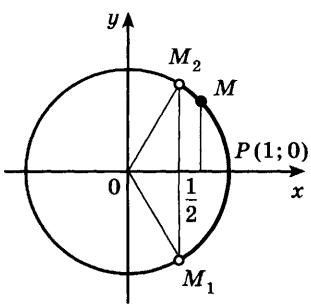


Рис. 80

Абсциссу, равную $\frac{1}{2}$, имеют две точки единичной окружности M_1 и M_2 (рис. 80).

Точка M_1 получается поворотом точки $P\ (1;\ 0)$ на угол $-\frac{\pi}{3}$, а также на углы $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Точка M_2 получается поворотом на угол $\frac{\pi}{3}$, а также на углы $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Абсциссу, большую $\frac{1}{2}$, имеют все точки M дуги единичной окружности, лежащие правее прямой M_1M_2. Таким образом, решениями неравенства $\cos x > \frac{1}{2}$ являются все числа x из промежутка $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$.

Все решения данного неравенства — множество интервалов

$$\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}. \ \triangleleft$$

Задача 2 Решить неравенство $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$.

▶ Абсциссу, не большую $\frac{1}{2}$, имеют все точки дуги M_1MM_2 единичной окружности (рис. 81). Поэто-

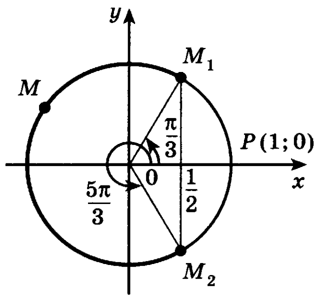


Рис. 81

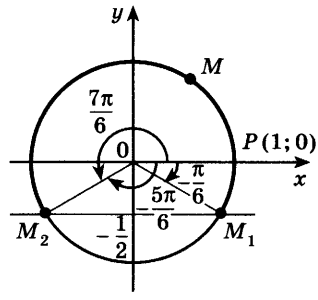


Рис. 82

му решениями неравенства $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$ являются числа x, которые принадлежат отрезку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$.

Все решения данного неравенства — множество отрезков

$$\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right], \ n \in \boldsymbol{Z}. \lhd$$

Задача 3 Решить неравенство $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$.

▶ Ординату, не меньшую $-\frac{1}{2}$, имеют все точки дуги M_1MM_2 единичной окружности (рис. 82). Поэтому решениями неравенства $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$ являются числа x, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]$. Все решения данного неравенства — множество отрезков

$$\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right], \ n \in \boldsymbol{Z}. \lhd$$

Отметим, что все точки окружности, лежащие ниже прямой M_1M_2, имеют ординату, меньшую $-\frac{1}{2}$ (рис. 82). Поэтому все числа $x \in \left(-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right)$ являются решениями неравенства $\sin x < -\frac{1}{2}$. Все решения этого неравенства — интервалы

$$\left(-\frac{5\pi}{6}+2\pi n; -\frac{\pi}{6}+2\pi n\right), \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Задача 4 Решить неравенство $\cos\left(\frac{x}{4}-1\right) \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

▶ Обозначим $\frac{x}{4}-1=y$. Решая неравенство $\cos y \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 83), находим

$$\frac{3\pi}{4}+2\pi n \leqslant y \leqslant \frac{5\pi}{4}+2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Заменяя $y=\frac{x}{4}-1$, получаем

$$\frac{3\pi}{4}+2\pi n \leqslant \frac{x}{4}-1 \leqslant \frac{5\pi}{4}+2\pi n,$$

откуда

$$1+\frac{3\pi}{4}+2\pi n \leqslant \frac{x}{4} \leqslant 1+\frac{5\pi}{4}+2\pi n,$$

$$4+3\pi+8\pi n \leqslant x \leqslant 4+5\pi+8\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

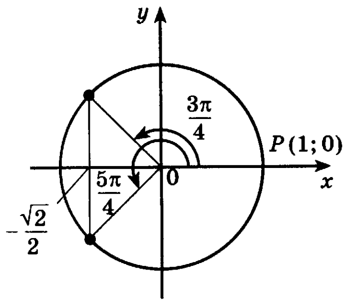


Рис. 83

Ответ $4+3\pi+8\pi n \leqslant x \leqslant 4+5\pi+8\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◁

Упражнения

Решить неравенство (**648—654**).

648 1) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

649 1) $\cos x \leqslant \sqrt{3}$; 2) $\cos x < -2$; 3) $\cos x \geqslant 1$; 4) $\cos x \leqslant -1$.

650 1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 2) $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

651 1) $\sin x \geqslant -\sqrt{2}$; 2) $\sin x > 1$;

3) $\sin x \leqslant -1$; 4) $\sin x \geqslant 1$.

652 1) $\sqrt{2}\cos 2x \leqslant 1$; 2) $2\sin 3x > -1$;

3) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

653 1) $\cos\left(\frac{x}{3}+2\right) \geqslant \frac{1}{2}$; 2) $\sin\left(\frac{x}{4}-3\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

654 1) $\sin^2 x + 2\sin x > 0$; 2) $\cos^2 x - \cos x < 0$.

Упражнения к главе VI

655 Вычислить:

1) $2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$;

2) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - 4 \arcsin 1$;

3) $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\arccos (-1) - \arcsin (-1)$;

5) $2 \operatorname{arctg} 1 + 3 \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

6) $4 \operatorname{arctg} (-1) + 3 \operatorname{arctg} \sqrt{3}$.

Решить уравнение (656—665).

656 1) $\cos (4 - 2x) = -\frac{1}{2}$; 2) $\cos (6 + 3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sqrt{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$; 4) $2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) - \sqrt{3} = 0$.

657 1) $2 \sin \left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$; 2) $1 - \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0$;

3) $3 + 4 \sin (2x + 1) = 0$; 4) $5 \sin (2x - 1) - 2 = 0$.

658 1) $(1 + \sqrt{2} \cos x)(1 - 4 \sin x \cos x) = 0$;

2) $(1 - \sqrt{2} \cos x)(1 + 2 \sin 2x \cos 2x) = 0$.

659 1) $\operatorname{tg} \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$; 2) $\operatorname{tg} \left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt{3} - \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$; 4) $1 - \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{7}\right) = 0$.

660 1) $2 \sin^2 x + \sin x = 0$; 2) $3 \sin^2 x - 5 \sin x - 2 = 0$;

3) $\cos^2 x - 2 \cos x = 0$; 4) $6 \cos^2 x + 7 \cos x - 3 = 0$.

661 1) $6 \sin^2 x - \cos x + 6 = 0$; 2) $8 \cos^2 x - 12 \sin x + 7 = 0$.

662 1) $\operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x = 0$; 2) $2 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 = 0$;

3) $\operatorname{tg} x - 12 \operatorname{ctg} x + 1 = 0$; 4) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$.