1 курс (2 семестр)

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения лекционного занятия по дисциплине
«Математика»

Раздел 7. Многогранники и тела вращения.

Тема № 7.5: «Боковая и полная поверхность призмы, пирамиды»

Лекционное занятие № 8

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань
2025

Лекционное занятие № 8
по Теме № 7.5 «Боковая и полная поверхность призмы, пирамиды»

Цель занятий: изучить со студентами площадь боковой и полной поверхности призмы, пирамиды.

Виды занятий: классно-групповые, комбинированные (по проверке знаний, умений по пройденному материалу, по изучению и первичному закреплению нового материала).

Методы проведения занятий: доведение теоретических сведений, выполнение практических заданий.

Время проведения: 6 ч (3 занятия по 2 ч)

Основные вопросы:

1. Площадь боковой и полной поверхности призмы.
2. Площадь боковой и полной поверхности пирамиды.
3. Практическое применение полученных знаний – решение задач.

Литература:

1. [2 учебник раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины]: Атанасян Л.С. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия.10-11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровень/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – Москва: Просвещение, 2024.-287с., ISBN 978-5-09-112137-7. —Текст : электронный // ЭБС Лань — URL: https://e.lanbook.com/book/408659, с.68,73-74 **§ 2, п.30,32** (**2024,2019 годы издания**, глава **III**), с.64-65, 69-70, **§ 2, п.30,32** (**2012-2014 годы издания**, глава **III**).

Примерный расчет времени (по каждому занятию):

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

Вступительная часть(по каждому занятию):

Занятие начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (нового материала), закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы, опроса по пройденному материалу.

Основная часть (теоретическая, практическая):

Первый вопрос: **<u>Площадь боковой и полной поверхности призмы.</u>**

Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех её граней, а **площадью боковой поверхности призмы** — сумма площадей её боковых граней. Площадь $S_{полн}$ полной поверхности выражается через площадь $S_{бок}$ боковой поверхности и площадь $S_{осн}$ основания призмы формулой

$$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}.$$

Докажем теорему о площади боковой поверхности прямой призмы.

Теорема

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

Доказательство

Боковые грани прямой призмы — прямоугольники, основания которых — стороны основания призмы, а высоты равны высоте h призмы. Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей указанных прямоугольников, т. е. равна сумме произведений сторон основания на высоту h. Вынося множитель h за скобки, получим в скобках сумму сторон основания призмы, т. е. его периметр P. Итак,

$$S_{бок} = Ph.$$

Теорема доказана.

Сведения по данному вопросу представлены во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с.68 (часть 1), **§ 2, п.30** (**2024**,**2019** годы издания, **глава III**), с.64-65, **§ 2, п.30** (**2012-2014** годы издания, глава **III**).

Второй вопрос: **<u>Площадь боковой и полной поверхности пирамиды.</u>**

Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех её граней (т. е. основания и боковых граней), а **площадью боковой поверхности пирамиды** — сумма площадей её боковых граней. Очевидно, $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$.

Сведения по данному вопросу представлены во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с.73-74 (часть 1), **§ 2, п.32** (**2024**,**2019** годы издания, **глава III**), с.69-70, **§ 2, п.32** (**2012-2014** годы издания, глава **III**).

Пирамида называется **правильной**, если её основание — правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания[1], является её высотой (рис. 82).

Докажем, что все боковые рёбра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.

Рассмотрим правильную пирамиду $PA_1A_2 \dots A_n$ (см. рис. 82). Сначала докажем, что все боковые рёбра этой пирамиды равны. Любое боковое ребро представляет собой гипотенузу прямоугольного треугольника, одним катетом которого служит высота PO пирамиды, а другим — радиус описанной около основания окружности (например, боковое ребро PA_1 — гипотенуза треугольника OPA_1, в котором $OP = h$, $OA_1 = R$). По теореме Пифагора любое боковое ребро равно $\sqrt{h^2 + R^2}$, поэтому

$$PA_1 = PA_2 = \dots = PA_n.$$

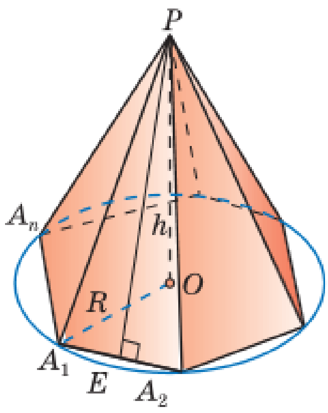


Рис. 82

Мы доказали, что боковые рёбра правильной пирамиды $PA_1A_2 \dots A_n$ равны друг другу, поэтому боковые грани — равнобедренные треугольники. Основания этих треугольников также равны друг другу, так как $A_1A_2 \dots A_n$ — правильный многоугольник. Следовательно, боковые грани равны по третьему признаку равенства треугольников, что и требовалось доказать.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины, называется **апофемой**. На рисунке 82 отрезок PE — одна из апофем. Ясно, что все апофемы правильной пирамиды равны друг другу.

Докажем теорему о площади боковой поверхности правильной пирамиды.

Теорема

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

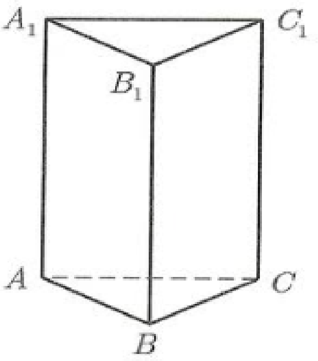
Доказательство

Боковые грани правильной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, основания которых — стороны основания пирамиды, а высоты равны апофеме. Площадь S боковой поверхности пирамиды равна сумме произведений сторон основания на половину апофемы d. Вынося множитель $\frac{1}{2}d$ за скобки, получим в скобках сумму сторон основания пирамиды, т. е. его периметр. Теорема доказана.

Третий вопрос: <u>Практическое применение полученных знаний – решение задач.</u>

Площадь боковой поверхности прямой призмы: $S_{б.п.}$ = **P•H** где P — периметр основания призмы (сумма всех сторон основания), H — высота призмы.

Площадь полной поверхности призмы равна сумме площади её боковой поверхности и удвоенной площади основания: $S_{п.п.}$ = **P•H +2•** $S_{осн}$



Дано: $ABCC_1B_1A_1$ треугольная призма, прямая, правильная

AB=BC=AC = 5 см, H = 10 см

Найти: $S_{б.п.}$, $S_{п.п.}$

Решение: $S_{б.п.}$ = **P•H**

P=5+5+5=15, H=10

$S_{б.п.}$= 15•10 = 150 (см^2)

Фóрмула Герона позволяет вычислить площадь треугольника (S) по его сторонам a, b, c:

$S_{осн}$= √p(p-a)(p-в)(p-c)

где p — полупериметр треугольника:
p = (a+в+c):2

p= 15:2 =7,5
$S_{п.п.}$ = P•H +2• $S_{осн,}$ = 150 + 2•7,7 = 164,4 (см^2)

Боковая поверхность — это сумма площадей боковых граней.

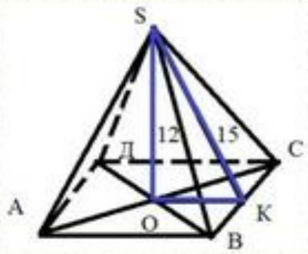
Для нахождения боковой поверхности в правильной пирамиде можно использовать формулу:

$S_{б.п.}$= 1/2•P•ℓ, где P – периметр основания.

Полная поверхность — это сумма площади боковой поверхности и площади основания.

Для нахождения полной поверхности в правильной пирамиде можно использовать формулу:

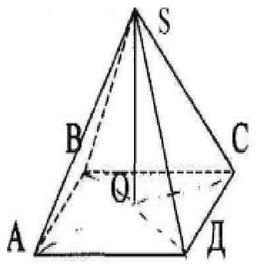
$S_{п.п.}$ = 1/2•P•ℓ+$S_{осн.}$



Задача №2

Дано: SABCД правильная четырехугольная пирамида, h=15 см, H=12см.
Найти: S пол.
Решение:

1) Треугольник SOK прямоугольный:
$OK = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225-144} = 9$(см)
$AB = 2\,OK = 2 \cdot 9 = 18$ (см)
2) $S_{осн} = AB^2 = 18^2 = 324$ (см^2)
3) $S_{бок} = 4 \cdot S_{\Delta} = 4 \cdot 1/2 \cdot 15 \cdot 18 = 540$ (см^2)
4) $S_{пол} = 324 + 540 = 864$ (см^2)
Ответ: $S_{пол} = 864$ (см^2)



Дано: SABCД – пирамида, ABCД –прямоугольник. AB=3см, BC= 6см, H=10см, ℓ_1=10,5см., ℓ_2=10,2см , ℓ- апофема. Найти: $S_{б.п.}$ $S_{п.п.}$

Решение.

т.к. пирамида неправильная, то $S_{б.п.}$ находят как сумму площадей ее боковых граней, т.е. площадей треугольников. $S_1 = 1/2 \cdot \ell_1 \cdot AB = 1/2 \cdot 10{,}5 \cdot 3 = 15{,}75$(см^2) - это площадь одной грани, а их две одинаковых, т.е

$S_{1,2} = 15{,}75 \cdot 2 = 31{,}5$(см^2)

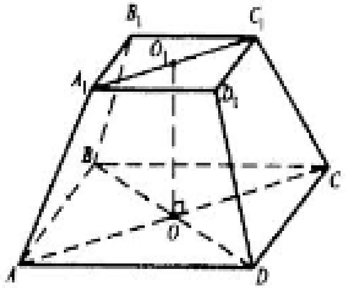
$S_3 = 1/2 \cdot \ell_2 \cdot BC = 1/2 \cdot 10{,}2 \cdot 6 = 30{,}6$ (см^2), $S_{3,4} = 2 \cdot 30{,}6 = 61{,}2$(см^2)

$S_{б.п.} = 31{,}5 + 61{,}2 = 92{,}7$(см^2)

$S_{осн.} = AB \cdot BC = 3 \cdot 6 = 18$(см^2), $S_{п.п.} = S_{б.п} + S_{осн.} = 92{,}7 + 18 = 110{,}7$ (см^2)

Задача № 4:

В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде апофема равна 12 см, боковое ребро 13 см и боковая поверхность 720 см^2. Определите стороны оснований.



Дано:

1) правильная четырёхугольная усечённая пирамида $AA_1B_1C_1CDD_1$
2) боковое ребро AA_1 =13 см
3) площадь боковой поверхности $S_{\text{б.п.}}$ = 720 см^2
4) апофема (высота боковой грани) A_1M = 12 см

Найти:

1) A_1D_1 − ?
2) AD − ?

Решение:

1) Боковая поверхность есть сумма четырёх равных трапеций. Поэтому

   $S(AA_1D_1D) = 720/4 = 180$ см^2

2) В трапеции AA_1D_1D проведём высоту A_1M, это и есть апофема и A_1M =12 см.

3) Из прямоугольного треугольника AA_1M по теореме Пифагора получим

$AM^2 = A_1A^2 - A_1M^2 = 169 - 144 = 25$. Тогда AM =5 см

4) $S(AA_1D_1D) = (AD + A_1D_1)*12/2 = 180$, тогда $AD + A_1D_1 = 180/6 = 30$ см

5) $A_1D_1 = (30 - 5 - 5)/2 = 10$ см, тогда $AD = (AD + A_1D_1) - A_1D_1 = 30 - 10 = 20$ см

A_1D_1 = 10 см

AD = 20 см

Ответ: 10 см и 20 см

<u>Задача № 5:</u>

В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде высота равна 12 см, разность сторон оснований 10 см и полная поверхность 512 см^2. Определите стороны оснований.

Задание: (исходные данные):

1. Привести примеры призм, пирамид в окружающем мире, в строительстве зданий, сооружений.
2. Решить задачи, заданные преподавателем (из приведенного ниже списка):
№ 230,237, 251, 252 Учебника, № 5.

Заключительная часть.

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Выдать задание на самоподготовку (домашнее задание).

Задание на самоподготовку (домашнее задание):

1. Детально проработать материал занятия, размещенный в данном план-конспекте, в учебнике, размещенном на с.2 текущего документа.
2. Подготовиться к опросу по пройденному материалу.